Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2014
Harjoitus 12

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 25.4.2013 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 2.5.2013 klo 19.30

Tehtäviä voi korjata vain kerran!

Tehtäväsarja I

1. Totta vai tarua?
   (a) Jokainen sivuluokka on aliryhmä.
   (b) Jokainen aliryhmä on sivuluokka.
   (c) Jokainen jäännösluokka on sivuluokka.

2. Ryhmällä $\mathbb{Z}$ on aliryhmä H, jossa tiedetään olevan alkiot -24, 12 ja 36. Ovatko sivuluokat $5 + H$ ja $29 + H$ samat?

Tehtäväsarja II

Tehtävissä 3–5 käsitellään matriisiryhmää $GL_n(\mathbb{R})$ ja sen osajoukkoa

$$S = \{a \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(a) = 1\}.$$

3. Osoita, että S ryhmän $GL_n(\mathbb{R})$ on normaali aliryhmä.

   Neuvo: Normaalisuuskriteeri on tässä kätevä. Muista myös osoittaa joukko aliryhmäksi.

4. Miksi sivuluokkajoukko $GL_n(\mathbb{R})/S$ on ryhmä?

5. Merkitään
$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
   Päteekö $aSbS = cS$? Entä $(aS)^{-1} = bS$?

6.* Määritä alkion $\frac{3}{4} + \mathbb{Z}$ kertaluku tekijäryhmässä $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Tehtäväsarja III

7. Miten ryhmähomomorfismismin ydin ja kuva liittyvät kuvauksen injektiivisyyteen ja surjektiivisuuteen? Selitä omin sanoin, mistä yhteydet näiden käsitteiden välilä johtuvat.

8. Millainen isomorfismi homomorfismista $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a,b) = b$ saadaan ryhmien homomorfialauseen avulla?

9.* Osoita ryhmien homomorfialauseen avulla, että ryhmät $6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Z}_3$ ovat isomorfisia.

   Neuvo: Apuna on käytettävä sopivaa kuvausta $f\colon 6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$.

Tehtäväsarja IV

10. Listaa kaikki joukon $A = \{P \in \mathbb{Z}_2[X] \mid \deg(P) = 2\}$ alkiot.
11. Anna esimerkki kahdesta renkaan $\mathbb{Z}_3[X]$ eri polynomista, joita vastaava polynomikuvaus on vakiokuvaus
$$f\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3, \quad f(x) = 1$$
Vinkki: Varo, ettet vahingossa anna samaa polynomia kahdella eri tavalla kirjoitettuna! Toisen polynomin asteeksi kannattaa valita kolme.
12. Onko renkaan $\mathbb{Z}_3[X]$ polynomi $X^3 + 2X + 2$ jaoton?

Tehtäväsarja V

13. Onko polynomirenkaan $\mathbb{Z}_5[X]$ alkio $3X^2 - 2X$ yksikkö?
14. Tutkitaan ryhmää $\mathbb{Z}_8$ ja sen aliryhmää $I = \langle [4]_8 \rangle$. Sivuluokkien joukossa $\mathbb{Z}_8/I$ voidaan määritellä kertolasku kaavalla
$$(a + I) \cdot (b + I) = ab + I.$$
Tällöin joukko $\mathbb{Z}_8/I$ on rengas. Määritä renkaan $\mathbb{Z}_8/I$ kertotaulu.

Mikä on renkaan ykkösalkio? Onko rengas kokonaisalue?

Samalla tavalla tavalla kuin ryhmistä saadaan tekijäryhmiä, renkaista saadaan tekijärenkaita, mistä saatii esimakua jo edellä. Tutustu lukuun 16, jossa käsitellään ideaaleja ja tekijärenkaita

15. Osoita, että $I = \langle [4]_8 \rangle$ on renkaan $\mathbb{Z}_8$ ideaali. Miten tämä liittyy siihen, että sivuluokkien joukossa voidaan määritellä kertolasku?

Tehtäväsarja VI

16. Laadi käsitekartta kurssilla käsitellyistä asioista. Selitä kartassasi käsitteiden väliset yhteydet. Merkitse karttaan jollakin tavalla kaikkein keskeisimmät käsitteet.

Ylimääräisiä tehtäviä

Tehtävillä 17–18 voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

17. Oletetaan, että $G = \langle g \rangle$ on äärellinen syklinen ryhmä, jossa on n alkiota. Osoita ryhmien homomorfialauseen avulla, että $\mathbb{Z}_n \cong G$.

Seuraavassa tehtävässä todistetaan niin kutsuttu Cayleyn lause. Se osoittaa, että jokainen ryhmä voidaan tulkita jonkin symmetrisen ryhmän aliryhmäksi.

18. Oletetaan, että G on ryhmä. Tutkitaan ryhmää S_G, joka koostuu kaikista ryhmän G alkioiden permutaatiosta.
    (a) Oletetaan, että $g \in G$. Osoita, että kuvaus $f_g\colon G \to G$, $f_g(x) = gx$ on bijektio. Toisin sanoen $f_g \in S_G$.
    (b) Edellisen kohdan nojalla voidaan määritellä kuvaus $\varphi\colon G \to S_G$ kaavalla $\varphi(g) = f_g$. Osoita, että φ on ryhmähomomorfismi.
    (c) Osoita, että φ on injektio. Päättele tämän avulla, että ryhmällä S_G on aliryhmä, joka on isomorfinen ryhmän G kanssa.