Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2014
Harjoitus 11

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 11.4.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 2.4.2014 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Neliön symmetriaryhmä D_4 koostuu neliön symmetrioista, joita ovat kierrot ja peilaukset. Ryhmän kertotaulu on esitetty ohessa. Kiertoja on merkitty symbolilla ρ ja peilauksia symbolilla σ. Tehtävissä 1–3 tutkitaan tätä ryhmää.

$\cdot$	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
1	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	1	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	1	ρ_1	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2
ρ_3	ρ_3	1	ρ_1	ρ_2	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3
σ_2	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1	ρ_3	1	ρ_1	ρ_2
σ_3	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	ρ_2	ρ_3	1	ρ_1
σ_4	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3	1

1. Ryhmällä D_4 on normaali aliryhmä $R_2 = \{1, \rho_2\}$. Määritä sivuluokkien joukko D_4/R_2.
2. Koska aliryhmä R_2 on normaali, sivuluokkien joukko D_4/R_2 on ryhmä. Määritä tämän tekijäryhmän D_4/R_2 kertotaulu. Onko kyseessä Kleinin neliryhmä vai syklinen ryhmä?
3. Piirrä kuva ryhmästä D_4/R_2. Merkitse kuvaan seuraavat ryhmän alkiot:
   (a) $\rho_1 R_2$
   (b) $\sigma_1 R_2$ ja $\sigma_2 R_2$ sekä näiden alkioiden tulo.
   (c) alkion $\rho_1 R_2$ käänteisalkio.

4.* Oletetaan, että G on vaihdannainen ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N. Osoita, että myös tekijäryhmä G/N on vaihdannainen.

Tehtäväsarja II

5. Onko $A = \{(1), (234), (243)\}$ ryhmän S_4 normaali aliryhmä?

6.* Tutkitaan edelleen ryhmän S_4 aliryhmää $A = \{(1), (234), (243)\}$. Osoita laskutoimituksen määritelmän perusteella, että joukossa S_4/A ei voi määritellä laskutoimitusta kaavalla

$$\alpha A \cdot \beta A = \alpha\beta A.$$

Miten saman asian olisi voinut päätellä edellisen tehtävän avulla?

Vihje: Kannattaa valita tarkasteltaviksi esimerkiksi sivuluokat A sekä $(14)A$.

Tehtäväsarja III

7.* Määritä kaikki ensimmäisen asteen polynomit, jotka jakavat polynomin $X^2+1 \in \mathbb{Z}_5[X]$.

8. Onko polynomi $X^4 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$ jaoton?

Tehtäväsarja IV

Tutustu lukuun 20, jossa käsitellään ryhmien homomorfialausetta.

Tehtävissä 7–11 tutkitaan kuvausta $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{15}$, $f(a) = [3a]_{15}$.

9. Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.

10. Mikä on homomorfismin f ydin? Perustele vastauksesi huolellisesti.

11. Mikä on homomorfismin f kuva?

12. Maalijoukolla on aliryhmä

$$H = \{[0]_{15}, [3]_{15}, [6]_{15}, [9]_{15}, [12]_{15}\}.$$

Päättele ryhmien homomorfialauseen avulla, että ryhmä $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on isomorfinen ryhmän H kanssa.

13. Mille alkiolle edellisen tehtävän isomorfismi kuvaa sivuluokan $3 + 5\mathbb{Z}$? Entä sivuluokan $-11 + 5\mathbb{Z}$? Piirrä tilanteesta kuva.

Tehtäväsarja V

14.* Olkoon $f\colon G \to H$ ryhmähomomorfismi. Oletetaan, että $a, b \in c \ker f$ jollakin $c \in G$. Osoita, että $f(a) = f(b)$.

15. Selitä omin sanoin, mitä tulit todistaneeksi edellisessä tehtävässä. (Tässä ei tarvitse selittää, *miten* todistit väitteen, vaan ainoastaan muotoilla todistettu tulos uudelleen niin, että sen idea välittyy paremmin.)

16. Määritä kaikki homomorfismit ryhmältä $\mathbb{Z}_4$ ryhmälle S_3.

Tehtäväsarja VI

Renkaille voidaan määritellä rengashomomorfismi samaan tapaan kuin ryhmille määritellään ryhmähomomorfismi. Tutustu kirjan lukuun 19, jossa käsitellään rengashomomorfismeja.

17. Olkoon R rengas. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{Z} \to R$, $f(a) = 1_R \cdot a$ on rengashomomorfismi.

Ylimääräinen tehtävä

18. Olkoon G ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N. Oletetaan lisäksi, että $[G : N] = k$. Osoita, että $g^k \in N$ kaikilla $g \in G$.