Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2014
Harjoitus 10

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 4.4.2014 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 25.4.2014 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Tehtävissä 1–2 tarkastellaan ryhmää $\mathbb{Z}_9$ ja sen normaalia aliryhmää $A = \langle [6]_9 \rangle$.

1. (a) Määritä sivuluokkien joukko $\mathbb{Z}_9/A$.
   (b) Koska aliryhmä A on normaali, sivuluokkien joukko $\mathbb{Z}_9/A$ on ryhmä. Kirjoita tämän niin kutsutun tekijäryhmän $\mathbb{Z}_9/A$ yhteenlaskutaulu.

2. Järjestä ryhmän $\mathbb{Z}_9$ yhteenlaskutaulussa alkiot aliryhmän A sivuluokkien mukaan. Miten taulussa näkyy tekijäryhmä $\mathbb{Z}_9/A$?

3.* Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä. Osoita, että $HH = H$.

Tehtäväsarja II

Tehtävissä 4–5 tutkitaan kvaternioryhmää[1] $Q = \{1,\ -1,\ i,\ -i,\ j,\ -j,\ k,\ -k\}$, jonka kertotaulu on esitetty ohessa.

	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

4. Osoita, että $N = \{1, -1\}$ on ryhmän Q normaali aliryhmä.

5.* Koska N on normaali aliryhmä, muodostaa sivuluokkien joukko Q/N ryhmän. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa tässä ryhmässä?

   a) $jN \cdot iN = kN$ b) $(iN)^3 = jN$ c) $(kN)^{-1} = iN$

   Perustele vastauksesi määritelmien avulla.

6. Tutkitaan tekijäryhmää $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Osoita, että alkiolla $2/3+\mathbb{Z}$ on tekijäryhmässä vasta-alkiot $-2/3 + \mathbb{Z}$ ja $7/3 + \mathbb{Z}$. Miksei tämä ole ristiriidassa sen kanssa, että ryhmän alkiolla voi olla vain yksi käänteisalkio?

[1] Kvaterniot löysi William Rowan Hamilton vuonna 1843.

Tehtäväsarja III

Tutustu lukuun 22, jossa käsitellään polynomien jaollisuutta.

7. Määritä polynomin $X^2 - X - 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$ juuret.

8. Etsi jokin ensimmäistä astetta oleva polynomi, joka jakaa edellisen tehtävän polynomin.

9. Korollaarin 21.8 mukaan polynomirengas on kokonaisalue, jos sen kerroinrengas on kokonaisalue. Selitä omin sanoin, mistä tämä johtuu.

10.* Onko polynomirengas $\mathbb{Z}_{100}[X]$ kokonaisalue?

Tehtäväsarja IV

Tutustu kirjan lukuun 18, jossa käsitellään ryhmähomomorfismeja.

Tehtävissä 11–13 tutkitaan seuraavia kuvauksia:

$$\begin{aligned} g&\colon (\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot), \quad g(x) = 3x \\ h&\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot), \quad h(n) = (-1)^n \\ f&\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \quad f(a, b) = (a, 0) \end{aligned}$$

11. Mitkä kuvauksista ovat ryhmähomomorfismeja?

12. Määritä ryhmähomomorfismien ytimet.

13. Mitä voit päätellä ytimien perusteella kuvausten injektiivisyydestä?

Tehtäväsarja V

14. Olkoon G ryhmä ja N sen normaali aliryhmä. Osoita, että tekijäryhmän G/N alkiolle gN pätee $(gN)^k = g^k N$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.

Ylimääräisiä tehtäviä

Seuraavilla tehtävillä voi korvata mitkä tahansa tähdettömät tehtävät.

15. Oletetaan, että R on ääretön kunta. Osoita, että kaksi eri polynomirenkaan $R[X]$ polynomia ei voi määrittää samaa polynomikuvausta. Polynomit voidaan siis samastaa polynomikuvausten kanssa, jos kerroinkunta on ääretön.

16. Anna kaksi kaksi ryhmää, joiden kertaluku on 42 ja jotka eivät ole isomorfisia keskenään. (Muista perustella, että ryhmät eivät ole isomorfisia.)