

## Algebra I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2014

### Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 17.1.2014 klo 19.30

Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 31.1.2014 klo 19.30

Ylimääräinen tehtävä 16 on hieman haastavampi. Voit korvata sillä minkä tahansa tähdetön tehtävän.

### Tehtäväsarja I

Tutustu kurssikirjan lukuun 2, jossa käsitellään laskutoimituksia.

Määritellään joukolle  $K_{12} = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$  laskutoimitus  $\oplus$ , jota kutsutaan kellotaulusummaksi: jos  $n, m \in K_{12}$ , niin  $n \oplus m$  on se kellonaika, joka saadaan, kun kellonaikaan  $n$  lisätään  $m$  tuntia. Esimerkiksi  $2 \oplus 6 = 8$  ja  $9 \oplus 4 = 1$ .

1. Määritä kellonajat  $3 \oplus 8$ ,  $10 \oplus 6$  ja  $12 \oplus 8$ .
2. Kuvitellaan kellotaulu, jossa on 11 tuntia, ja tarkastellaan kellotaulusummaa joukossa  $K_{11} = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$ . Mitä saat nyt tulokseksi edellisen tehtävän laskuista?

### Tehtäväsarja II

Äärellisessä joukossa määritellyn laskutoimituksen kaikki mahdolliset tulokset voidaan kirjoittaa *laskutoimitustauluun*. Taulun sarakkeet ja rivit nimetään joukon  $S$  alkioilla, ja taulukon riville  $x$  sarakkeeseen  $y$  kirjoitetaan tulos  $x * y$ .

3. Oheinen laskutoimitustaulu määrittelee erään hedelmien joukon laskutoimituksen. Kutsutaan tätä laskutoimitusta hedelmäkertolaskuksi.

$\otimes$	omena	banaani	päärynä	luumu
omena	luumu	omena	päärynä	banaani
banaani	omena	banaani	päärynä	luumu
päärynä	päärynä	päärynä	luumu	omena
luumu	banaani	luumu	omena	luumu

Määritä seuraavat hedelmät: päärynä  $\otimes$  banaani, omena  $\otimes$  luumu, päärynä  $\otimes$  omena.

### Tehtäväsarja III

Tutustu kurssikirjan lukuun 2.1, jossa käsitellään laskutoimituksen liitännäisyyttä ja vaihdannaisuutta.

4. Osoita, että tehtävän 3 hedelmäkertolasku ei ole liitännäinen.

5. Tehtävän 3 hedelmäkertolasku on vaihdannainen. Miten se näkyy laskutoimitustaulussa?
6. Määritellään reaaliluvuille laskutoimitus  $*$  kaavalla  $x * y = x^2 + y^2$ . Onko laskutoimitus liitännäinen?
- 7.\* Määritellään kokonaisluvuille laskutoimitus  $*$  kaavalla  $x * y = x - xy - y$ . Onko laskutoimitus vaihdannainen? (Muista perustella vastauksesi huolellisesti.)
- 8.\* Määritellään reaaliluvuille laskutoimitus  $*$  kaavalla  $x * y = 2xy$ . Onko laskutoimitus liitännäinen?

### Tehtäväsarja IV

Tutustu kurssikirjan lukuun 2.2, jossa käsitellään laskutoimituksen neutraalialkiota ja alkioiden käänteisalkioita.

9. Määritä joukon  $K_{12}$  kellotaulusumman neutraalialkio. Perustelujen ei tarvitse olla tarkat.
10. Jatkoa edelliseen tehtävään. Mitkä ovat alkioiden käänteisalkiot? Perustelujen ei tarvitse olla tarkat.
11. Mikä on neutraalialkio ja mitkä ovat alkioiden käänteisalkiot, jos tutkitaankin kellotaulusummaa joukossa  $K_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ?
12. Tehtävän 3 hedelmäkertolaskulla on neutraalialkio. Mikä se on? Millä hedelmillä on käänteishedelmät?
13. Merkitään  $A = \{1, 2\}$ . Tutkitaan potenssijoukkoa  $\mathcal{P}(A)$ . Yhdisteoperaatio  $\cup$  on joukon  $\mathcal{P}(A)$  laskutoimitus. Kirjoita sen laskutoimitustaulu. Mikä on laskutoimituksen  $\cup$  neutraalialkio?
- 14.\* Tutkitaan edelleen potenssijoukkoa  $\mathcal{P}(A)$ , missä  $A$  on kuten edellisessä tehtävässä. Leikkausoperaatio  $\cap$  on joukon  $\mathcal{P}(A)$  laskutoimitus. Kirjoita sen laskutoimitustaulu. Mikä on laskutoimituksen  $\cap$  neutraalialkio?
15. Olkoon  $X$  joukko. Määritä ne potenssijoukon  $\mathcal{P}(X)$  alkiot, joilla on käänteisalkio laskutoimituksen  $\cap$  suhteen.

### Ylimääräinen tehtävä

Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

16. Oletetaan, että  $*$  on joukossa  $S$  määritelty laskutoimitus. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Perustele vastauksesi.
  - (a) Jokaisella  $a \in S$  pätee  $(a * a) * a = a * (a * a)$ .
  - (b) Joukon  $S$  alkiolla voi olla useita käänteisalkioita laskutoimituksen  $*$  suhteen.