Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
2. kurssikoe
7.5.2014
Ratkaisuehdotus

1. (12 pistettä) Tutkitaan kuvausta $f\colon 3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_7$, $f(a) = [a/3]_7$.

   (a) Osoita, että f on homomorfismi.

   (b) Seuraavassa on yritetty osoittaa, että kuvauksen f ydin on $21\mathbb{Z}$. Todistus ei kuitenkaan ole pätevä. Selitä lyhyesti, mikä todistuksessa on vialla, ja korjaa sen jälkeen todistus.

   ”Oletetaan, että $a \in 21\mathbb{Z}$. Nyt $a = 21k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Huomataan, että

   $$f(a) = f(21k) = [7k]_7 = [0]_7.$$

   Siten $\operatorname{Ker} f = 21\mathbb{Z}$.”

   (c) Millainen isomorfismi homomorfismista f saadaan ryhmien homomorfialauseen avulla? Mikä alkio kuvautuu kyseisessä isomorfismissa alkiolle $[2]_7$?

Ratkaisuehdotus:

(a) Oletetaan, että $a, b \in 3\mathbb{Z}$. Nyt $f(a+b) = [(a+b)/3]_7 = [a/3 + b/3]_7 = [a/3]_7 + [b/3]_7 = f(a) + f(b)$. Siten kyseessä on homomorfismi.

(b) Todistuksessa on osoitettu vain, että $21\mathbb{Z} \subset \operatorname{Ker} f$.

Todistus korjaantuu, kun siihen lisätään seuraava osio:

”Oletetaan, että $a \in \operatorname{Ker} f$. Nyt $f(a) = [0]_7$ eli $[a/3]_7 = [0]_7$. Tästä seuraa, että $a/3 = 7m$ jollakin $m \in \mathbb{Z}$, ja edelleen, että $a = 21m$. Siten $a \in 21\mathbb{Z}$. Näin on osoitettu, että $\operatorname{Ker} f \subset 21\mathbb{Z}$.”

(c) Jotta voidaan soveltaa ryhmien isomorfialausetta, pitää ensin selvittää kuvauksen f kuva. Osoittautuu, että kuva on koko maalijoukko. Jos nimittäin $[k]_7 \in \mathbb{Z}_7$, niin $f(3k) = [3k/3]_7 = [k]_7$. Siten jokaiselle maalijoukon alkiolle kuvautuu jotain, eli $\operatorname{Im} f = \mathbb{Z}_7$.

Nyt ryhmien homomorfialauseen avulla saadaan isomorfismi

$$\bar{f}\colon 3\mathbb{Z}/21\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_7, \quad \bar{f}(a + 21\mathbb{Z}) = [a/3]_7.$$

Huomataan, että $\bar{f}(6 + 21\mathbb{Z}) = [2]_7$, joten sivuluokka $6 + 21\mathbb{Z}$ on etsitty alkio.

2. (12 pistettä) Ryhmän $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ aliryhmästä H tiedetään, että siinä on kaksi alkiota.

   (a) Kuinka monta sivuluokkaa H:lla on?

   (b) Piirrä kuva sivuluokkien joukosta $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/H$. Voit itse valita havainnollistustavan, joka kuvaa mielestäsi parhaalla tavalla joukon rakennetta.

   (c) Oletetaan, että eräs H:n sivuluokista on $\{([1]_2, [1]_4), ([1]_2, [3]_4)\}$. Määritä muut H:n sivuluokat.

Ratkaisuehdotus:

(a) Ryhmässä $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ on alkioita $2 \cdot 4 = 8$. Lagrangen lauseen mukaan sivuluokkien lukumäärä on $8/2 = 4$.

(b) Kuvassa tulee näkyä neljä sivuluokkaa, jossa on jokaisessa kaksi alkiota.

(c) Aloitetaan määrittämällä H:n alkiot. Ensinnäkin H on aliryhmä, joten siinä on neutraalialkio $([0]_2, [0]_4)$. Lisäksi H:n tulee sisältää alkio $-([1]_2, [1]_4) + ([1]_2, [3]_4) = ([0]_2, [2]_4)$, sillä $([1]_2, [1]_4)$ ja $([1]_2, [3]_4)$ kuuluvat samaan sivuluokkaan. Koska H:ssa on kaksi alkiota, on kaikki H:n alkiot löydetty. Määritetään sitten sivuluokat:

$$\begin{aligned} H &= \{([0]_2, [0]_4), ([0]_2, [2]_4)\} \\ ([0]_2, [1]_4) + H &= \{([0]_2, [1]_4), ([0]_2, [3]_4)\} \\ ([1]_2, [1]_4) + H &= \{([1]_2, [1]_4), ([1]_2, [3]_4)\} \\ ([1]_2, [2]_4) + H &= \{([1]_2, [2]_4), ([1]_2, [0]_4)\}. \end{aligned}$$

Koska löydettiin neljä eri sivuluokkaa, ovat kaikki sivuluokat tässä.

Arvosteluperusteita:

(a) (4 pistettä)

(b) (2 pistettä) Yhden pisteen saa siitä, että kuvasta ilmenee, että sivuluokkia on neljä. Toisen pisteen saa siitä, että kuhunkin sivuluokkaan on piirretty kaksi alkiota.

(c) (6 pistettä) Jos ratkaisussa on määritetty, joukot $g + \{([1]_2, [1]_4), ([1]_2, [3]_4)\}$ kaikilla $g \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, saa ratkaisusta 2 pistettä. Jos H:n alkiot on arvattu oikein, mutta perusteluja ei ole, saa ratkaisusta kaksi pistettä. Jos on väitetty, että $H = \{([1]_2, [1]_4), ([1]_2, [3]_4)\}$, ei ratkaisusta saa pisteitä.

3. (6 pistettä) Tutkitaan rengasta $R = \{a, b, c, d\}$, jolla on oheiset laskutoimitustaulut:

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	a	c
d	a	d	c	b

(a) Mikä on renkaan R ykkösalkio?

(b) Onko alkio d yksikkö?

(c) Onko R kokonaisalue?

Ratkaisuehdotus:

(a) Ykkösalkio on b, sillä kertotaulusta nähtään, että se on kertolaskun neutraalialkio.

(b) Alkio d on yksikkö, sillä se on oma käänteisalkionsa ($d \cdot d = b$).

(c) Kyseessä ei ole kokonaisalue. Huomataan nimittäin, että $c \cdot c = a = 0_R$. Kuitenkaan c ei ole renkaan R nolla-alkio.

4. (6 pistettä)

(a) Mikä on renkaan $\mathbb{Z}_6[X]$ polynomin $18X^7 + 13X^4 - 3X$ aste?

(b) Olkoon R tehtävässä 3 käsitelty rengas. Määritä renkaan $R[X]$ polynomin $X^2 - 3X + 2$ juuret.

Ratkaisuehdotus:

(a) Huomataan, että renkaassa $\mathbb{Z}_6$ pätee $18 = 0$ ja $13 = 1$. Siten $18X^7 + 13X^4 + 3X = 0X^3 + X^4 + 3X = X^4 + 3X$. Nyt nähdään, että polynomin aste on neljä.

(b) Tulkitaan ensin polynomin kertoimet renkaan R alkioiksi. Tässä täytyy käyttää hyväksi sitä tietoa, että renkaan ykkösalkio on b. Nyt $-3 = -(3b) = -(b + b + b) = -d = b$ ja $2 = b + b = c$. Siis kyseessä on polynomi $X^2 + bX + c$. Koska b on renkaan ykkösalkio eli $b = 1$, saadaan polynomi vielä yksinkertaisempaan muotoon $X^2 + X + c$.

Etsitään polynomin juuret sijoittamalla vuorotellen kaikki renkaan R alkiot polynomiin:

$$\begin{aligned}
a^2 + a + c &= a + a + c = c \\
b^2 + b + c &= b + b + c = a \\
c^2 + c + c &= a + c + c = a \\
d^2 + d + c &= b + d + c = c.
\end{aligned}$$

Koska a on renkaan R nolla-alkio, ovat polynomin juuret b ja c.

5. (12 pistettä)

(a) Miten tekijäryhmät ja normaalit aliryhmät liittyvät toisiinsa?

(b) Oletetaan, että G on syklinen ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N. Osoita, että tekijäryhmä G/N on syklinen.

Ratkaisuehdotus:

(a) Jos ryhmän G aliryhmä N on normaali, voidaan sivuluokkien joukossa G/N määritellä laskutoimitus $\cdot$ ehdolla $gN \cdot hN = ghN$. Tällöin sivuluokkien joukko on ryhmä. Sitä kutsutaan ryhmän G tekijäryhmäksi aliryhmän N suhteen.

(b) Olkoon a ryhmän G virittäjä. Osoitetaan, että aN virittää ryhmän G/N. Tätä varten riittää näyttää, että jokainen ryhmän alkio on alkion aN potenssi.

Oletetaan, että $x \in G/N$. Nyt $x = gN$ jollakin $g \in G$. Koska G on syklinen, pätee $g = a^n$ jollakin $n \in \mathbb{Z}$. Kurssin tulosten perusteella $x = gN = a^nN = (aN)^n$. Siten alkio aN virittää ryhmän G/N.

Arvosteluperusteita:

(a) (4 pistettä) Pelkästä normaalin aliryhmän määritelmästä ei saa pisteitä, vaan jokin yhteys normaaliuden ja tekijäryhmien välillä pitää olla mainittuna.

(b) (8 pistettä) Jos syklisyyden määritelmä ei ole oikein, ei tehtävästä saa pisteitä.