Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
1. kurssikoe
26.2.2014
Ratkaisuehdotus

1. (a) Mitkä seuraavista laskuista on laskettu oikein?

$$[3]_8 + [7]_8 = [5]_8 \qquad [-2]_4 + [3]_4 = [-7]_4 \qquad -[4]_5 = [6]_5$$

Perustele vastauksesi.

(b) Määritellään rationaalilukujen joukossa laskutoimitus $*$ ehdolla

$$a * b = a - 10 + b.$$

Osoita, että laskutoimituksella on neutraalialkio. Onko luvulla 2 käänteisalkiota laskutoimituksen $*$ suhteen?

Ratkaisuehdotus:

a) Jäännösluokkien yhteenlaskun määritelmän mukaan $[3]_8+[7]_8 = [3+7]_8 = [10]_8$. Osoitetaan, että $[10]_8 \neq [5]_8$. Koska erotus $10 - 5 = 5$ ei ole jaollinen luvulla 8, ei päde $10 \equiv 5 \pmod 8$. Siten $[10]_8 \neq [5]_8$, ja lasku on laskettu väärin.

Lasketaan sitten toinen laskuista: $[-2]_4 + [3]_4 = [-2 + 3]_4 = [1]_4$. Koska $1 - (-7) = 8$ on jaollinen luvulla 4, pätee $1 \equiv -7 \pmod 4$. Siten $[1]_4 = [7]_4$. Näin ollen lasku on laskettu oikein.

Tutkitaan vielä viimeistä väitettä. Huomataan, että $[4]_5 + [6]_5 = [10]_5 = [0]_5$ ja $[6]_5 + [4]_5 = [10]_5 = [0]_5$. Koska $[0]_5$ on jäännösluokkien yhteenlaskun neutraalialkio, on $[6]_5$ jäännösluokan $[4]_5$ vasta-alkio. Toisin sanoen $-[4]_5 = [6]_5$.

b) Osoitetaan, että neutraalialkio on 10. Oletetaan, että $a \in \mathbb{Q}$. Nyt $a * 10 = a - 10 + 10 = a$ ja $10 * a = a0 - 10 + a$. Siten neutraalialkio on 10.

Osoitetaan, että luvun 2 käänteisalkio on 18. Nähdään, että $2 * 18 = 2 - 10 + 18 = 10$ ja $18 * 2 = 18 - 10 + 2 = 10$. Koska molemmissa tapauksissa saadaan tulokseksi neutraalialkio, on alkion 2 käänteisalkio 18.

2. (a) Miten määritellään ryhmäisomorfismi?

(b) Jos ryhmien välillä on isomorfismi, ryhmät ovat rakenteeltaan samanalaiset. Isomorfismin määritelmässä ei kuitenkaan suoranaisesti sanota mitään tällaista. Selitä lyhyesti omin sanoin, miksi isomorfismin määritelmästä seuraa, että isomorfisten ryhmien algebralliset ominaisuudet ovat samanlaiset.

(c) Ryhmällä $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ on aliryhmä $H = \{20^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Osoita isomorfisuuden määritelmän perusteella, että ryhmä $(\mathbb{Z}, +)$ on isomorfinen ryhmän $(H, \cdot)$ kanssa.

Ratkaisuehdotus:

a) Oletetaan, että G ja H ovat ryhmiä. Kuvaus $f\colon G \to H$ on ryhmäisomorfismi, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) f on bijektio.

(b) Kaikilla $a, b \in G$ pätee $f(ab) = f(a)f(b)$.

b) Oletetaan, että G ja H ovat isomorfisia ryhmiä. Koska ryhmien välillä on bijektio, vastaa jokainen G:n alkio täsmälleen yhtä H:n alkiota ja jokainen H:n alkio täsmälleen yhtä G:n alkiota. Toisesta isomorfismin ehdosta puolestaan seuraa, että ryhmien laskutoimitukset ovat samanlaiset. Tästä seuraa, että ryhmien algebrallinen rakenne on samanlainen.

c) Osoitetaan, että kuvaus $f\colon \mathbb{Z} \to H$, $f(n) = 2^n$ on ryhmäisomorfismi.

Osoitetaan ensin, että f on bijektio. Aloitetaan injektiivisyydestä. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $f(a) = f(b)$. Nyt siis $20^a = 20^b$. Tästä seuraa, että $\log_{20} 20^b = \log_{20} 20^b$ ja edelleen $a = b$. Siten kuvaus on injektio. Osoitetaan sitten surjektiivisuus. Oletetaan, että $h \in H$. Nyt $h = a^n$ jollakin $n \in \mathbb{Z}$. Huomataan, että $f(n) = 20^n = h$. Siten f on surjektio.

Osoitetaan vielä toinen isomorfisuuden ehto. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{Z}$. Nyt

$$f(a + b) = 20^{a+b} = 20^a 20^b = f(a)f(b).$$

Siten kuvaus f on isomorfismi. Koska ryhmien välille löytyi isomorfismi, ryhmät ovat isomorfiset.

3. (a) Määritä ryhmän S_6 alkion $(425)(136)$ virittämä aliryhmä $\langle(425)(136)\rangle$. Mikä on alkion $(425)(136)$ kertaluku? Perustele vastauksesi huolellisesti.

(b) Anna esimerkki syklisestä ryhmästä, joka on ääretön. Mikä on keksimäsi ryhmän virittäjä?

Ratkaisuehdotus:

a) Tutkitaan alkion $(425)(136)$ potensseja:

$$\begin{aligned}
&(425)(136)^1 = (425)(136) \\
&(425)(136)^2 = (425)(136)(425)(136) = (245)(163) \\
&(425)(136)^3 = (425)(136)(425)(136)^2 = (425)(136)(245)(163) = (1).
\end{aligned}$$

Koska kolmannella potenssilla saatiin tulokseksi ryhmän neutraalialkio, on kaikki aliryhmän alkiot löydetty:

$$\langle(425)(136)\rangle = \{(1), (425)(136), (425)(136)^2\} = \{(1), (425)(136), (245)(163)\}.$$

Alkion (425)(136) kertaluku on edellä määritetyn aliryhmän alkioiden lukumäärä. Siten kertaluku on kolme. (Vaihtoehtoisesti voi todeta, että pienin positiivinen eksponentti, jolla saadaan neutraalialkio, on 3. Siis kertaluku on kolme.)

b) Esimerkiksi ryhmä $(\mathbb{Z}, +)$ on ääretön syklinen ryhmä. Ensinnäkin kyseessä on ääretön ryhmä, sillä kokonaislukuja on äärettömästi. Ryhmä on syklinen, sillä sen virittää alkio 1:

$$\langle 1\rangle = \{n\cdot 1 \mid n\in\mathbb{Z}\} = \{n \mid n\in\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$$

4. (a) Olkoon G vaihdannainen ryhmä, jolla on aliryhmät H ja K. Osoita, että aliryhmien tulo $HK = \{hk \mid h\in H,\ k\in K\}$ on ryhmän G aliryhmä.
   (b) Anna esimerkki ryhmästä G ja sen aliryhmistä H ja K, joiden tulo HK ei G:n ole aliryhmä.

Ratkaisuehdotus: a) Koska G on ryhmä, niin $HK \subset G$. Oletetaan, että $x, y \in HK$. Tällöin on olemassa $h_1, h_2 \in H$ ja $k_1, k_2 \in K$, joilla pätee

$$x = h_1k_1 \qquad \text{ja} \qquad y = h_2k_2.$$

(H1) Nyt ryhmän G vaihdannaisuuden nojalla

$$xy = h_1k_1h_2k_2 = h_1h_2k_1k_2.$$

Koska H ja K ovat aliryhmiä, pätee $h_1h_2 \in H$ ja $k_1k_2 \in K$. Siten $xy \in HK$.

(H2) Ryhmän G neutraalialkio e kuuluu aliryhmiin H ja K ja $e = ee$, joten $e \in HK$.

(H3) Tiedetään, että alkion x käänteisalkio on $k_1^{-1}h_1^{-1}$. Koska ryhmä on vaihdannainen, pätee $x^{-1} = h_1^{-1}k_1^{-1}$. Koska H ja K ovat aliryhmiä, tiedetään, että $h_1^{-1} \in H$ ja $k_1^{-1} \in K$. Siten $xy \in HK$.

Näin ollen HK on ryhmä.

b) Valitaan $G = S_3$, $H = \langle(12)\rangle$ ja $K = \langle(13)\rangle$. Koska $(12)^2 = (1)$ ja $(13)^2 = (1)$, pätee $H = \{(1), (12)\}$ ja $K = \{(1), (13)\}$. Nyt

$$HK = \{(1)(1), (1)(13), (12)(1), (12)(13)\} = \{(1), (13), (12), (132)\}.$$

Tämä ei ole aliryhmä, koska esimerkiksi $(13)(12) = (123) \notin HK$.