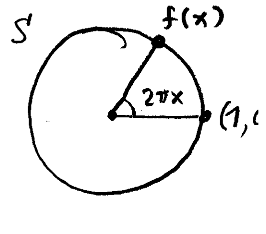
TOPOLOGIA II – 2. KURSSIKOE 3.5.2013

RATKAISUT JA PISTEYTYS

(1.) $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ yksikköympyrä



Olk. $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow \quad f : [0,1] \to S^1$ on hyvinmäär. kuvaus.

Lisäksi $f(0) = f(1) = (1,0)$ ja jok. $y \in S^1 \setminus \{(1,0)\}$ on täsm. yksi alkukuva joukossa $]0,1[$.

Siten f on surjektio ja $\sim$:n ekv.luokat ovat f:n säikeet (ts. $\sim = R_f$). $\boxed{3p}$ Selvästi f jva (cos ja sin ovat!).

Koska $[0,1]$ on kompakti (ja metrinen) sekä S^1 on metrinen, niin (lauseen 8.10 nojalla) f on <u>samastuskuv.</u>

Siten (lauseen 9.10 nojalla) $[0,1]/\sim$ on homeom. S^1:n kanssa. $\boxed{2p}$

(2.) Säännöllisyyden määr; ks. kirjan kohta 11.1. $\boxed{2p}$

<u>Ol.</u> X säännöllinen, $A \subset X$ <u>V.</u> A säännöllinen

<u>Tod.</u> T_1: Olk. $a,b \in A$, $a \neq b$. Koska X on T_1,

$\exists\ U \subset X$ s.e. $a \in U \circledcirc X$ ja $b \notin U$

$\Rightarrow a \in A \cap U \circledcirc A$ (ts. $A \cap U$ on a:n ystö A:ssa) $\boxed{1p}$

ja $b \notin A \cap U$. $\therefore$ A on T_1.

T_3: Olk. $a \in A$, $B \circledcirc A$ ja $a \notin B$. Tällöin

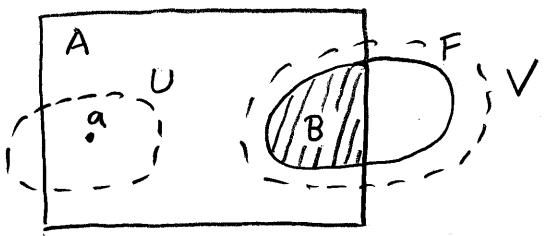
$B = A \cap F$, jossa $F \circledcirc X$ ja $a \notin F$ (muuten olisi $a \in B$).

Koska X on T_3, $\exists\ U, V \subset X$ s.e.

$a \in U \circledcirc X$, $F \subset V \circledcirc X$ ja $U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow a \in A \cap U \circledcirc A$, $B \subset A \cap V \circledcirc A$ ja $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$

$\therefore$ A on T_3. $\boxed{2p}$



(3.) X on Lindelöf, koska se on N_2: $[0,1]$ ja $\mathbb{R}$ ovat N_2 ja N_2 säilyy numeroituvassa tulossa

X ei ole kompakti, sillä $pr(X) = \mathbb{R}$ ei ole kompakti. Tässä $pr : X \to \mathbb{R}$ on projektio, $pr(y,z) = z$ kun $(y,z) \in X$ $(y \in [0,1]^{\mathbb{N}},\ z \in \mathbb{R})$.

X on lok. kompakti: jos $(y,z) \in X$ $(y \in [0,1]^{\mathbb{N}},\ z \in \mathbb{R})$, niin $V = [0,1]^{\mathbb{N}} \times]z-1, z+1[$ on (y,z):n ympäristö, jolle $\overline{V} = [0,1]^{\mathbb{N}} \times [z-1, z+1]$ on kompakti (Tihonov!).

Pisteytys: Oikeat vastaukset max 2p; perustelut 3p.

(4.) a) Kirjan kohdat 12.3 ja 12.17. $\boxed{2p}$

b) $\mathbb{Q}$ on numeroituva ja tiheä, sillä jokainen $\mathcal{B}$:n jäsen sis. rationaaliluvun. Siis $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ on separoituva. $\boxed{1p}$

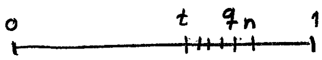
Olk. $\mathcal{B}'$ jokin $\mathcal{T}$:n kanta. Koska jokaisella $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pätee $b \in]-\infty, b] \in \mathcal{T}$, niin $\exists\, U(b) \in \mathcal{B}'$ s.e.

$$b \in U(b) \subset]-\infty, b].$$

Tällöin $b = \max U(b)$, joten $b \mapsto U(b)$ on injektio $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathcal{B}'$. Koska $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on ylinumva, myös $\mathcal{B}'$ on. Siis $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ei ole N_2. $\boxed{2p}$

(5.) Väite: $[0,1]$ ei ole kompakti $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$:ssä.

Tapa I: Val. jokin $t \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, esim. $t = 1/\sqrt{2}$ ja luvut $q_n \in]t, 1[\cap \mathbb{Q}$ s.e. $q_n \downarrow t$.



Tällöin

$$[0,1] \subset [0,t] \cup]t, \sqrt{2}[\;=\; \underbrace{[0,t]}_{\in \mathcal{B}} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{[q_n, \sqrt{2}]}_{\in \mathcal{B}}$$

Mutta tällä avoimella $[0,1]$:n peitteellä ei ole äärellistä osapeitettä: jos $N \in \mathbb{N}$, niin

$$[0,t] \cup \bigcup_{n=1}^{N} [q_n, \sqrt{2}] = [0,t] \cup [q_N, \sqrt{2}] \not\supset [0,1].$$ $\boxed{5p}$

Tapa II: Hav. että $\mathcal{T}|[0,1]$ on aidosti hienompi kuin $\mathcal{T}_{tav}|[0,1]$. Koska $\mathcal{T}_{tav}|[0,1]$ on Hausdorff, $\mathcal{T}|[0,1]$ ei voi olla kpti (kirjan HT 15:4).