Topologia II – 2. kurssikoe (3. 5. 2013)

Vastaa valintasi mukaan neljään tehtävään.

1. Määritellään joukossa $[0,1]$ ekvivalenssirelaatio $\sim$, jonka ekvivalenssiluokat ovat yksiöt $\{x\}$ $(0 < x < 1)$ ja joukko $\{0,1\}$. Perustele, että tekijäavaruus $[0,1]/\sim$ on homeomorfinen yksikköympyrän $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ kanssa.

2. (*teoria*) Miten määritellään topologisen avaruuden säännöllisyys? Osoita yksityiskohtaisesti, että säännöllisyys on periytyvä ominaisuus: jos X on säännöllinen ja $A \subset X$, niin myös A on säännöllinen.

3. Kerro, mitkä seuraavista ominaisuuksista tuloavaruudella $X = [0,1]^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}$ on: Lindelöf, kompaktius, lokaali kompaktius. Perustele vastauksesi vetoamalla kurssilla esitettyihin yleisiin tuloksiin ja avaruuksien $[0,1]$ sekä $\mathbb{R}$ tunnettuihin ominaisuuksiin.

4. a) (*teoria*) Miten määritellään topologisen avaruuden separoituvuus ja N_2-ominaisuus?

   b) Tunnetusti $\mathcal{B} = \{[a,b] : a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ a < b\}$ on $\mathbb{R}$:n erään topologian $\mathcal{T}$ kanta. Osoita, että $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ on separoituva mutta ei N_2. ($\mathbb{Q}$ on rationaalilukujen joukko.)

5. Tutki, onko väli $[0,1]$ kompakti edellisen tehtävän avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.