TOPOLOGIA II – 1. KURSSIKOE 1.3.2013

RATKAISUT JA PISTEYTYS (KARKEASTI)

(1.) $x \in A$ on A:n sisäp $\iff$ $\exists\, U \circledcirc X$ s.e. $x \in U \subset A$ $\boxed{2p}$

Olet. $A \cup B$:llä sisäp. Siis $\exists$ epätyhjä avoin $U \subset A \cup B$.
Jos A:lla ei sisäp, niin $U \not\subset A$ eli

$$U \setminus A = U \cap A^c \neq \emptyset$$

Tässä $U \cap A^c$ on avoin (kahden avoimen leikkaus)
ja $U \cap A^c \subset B$, joten B:llä on sisäp. $\boxed{3p}$

(2.) Koska $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{[n, n+\pi]}_{\in \mathcal{B}} = \mathbb{R}$, niin $\mathcal{B}$ on $\mathbb{R}$:n peite. $\boxed{1p}$

Olet. $[a_1, b_1] \in \mathcal{B}$ ja $[a_2, b_2] \in \mathcal{B}$. Tällöin

$$[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = \emptyset \quad (\text{jos } b_1 < a_2 \text{ tai } b_2 < a_1)$$

tai

$$[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = [\underbrace{\max(a_1, a_2)}_{\in \mathbb{Q}}, \underbrace{\min(b_1, b_2)}_{\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}] \in \mathcal{B} \quad (\text{muutoin})$$

Kantalauseen 2.9 nojalla (ehdot (K1) ja (K2'))
$\mathcal{B}$ on kanta eräälle $\mathbb{R}$:n tgralle $\mathcal{T}$. $\boxed{2p}$

Väite: $\overline{]0,1[} = [0,1[$ ($\mathcal{T}$:n suht.)

Tod. • Jos $x < 0$, niin $\exists\, a \in \mathbb{Q}$ ja $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ s.e.
$a \le x \le b < 0$ $\Rightarrow$

$$x \in \underbrace{[a, b]}_{\in \mathcal{B}} \subset \mathbb{R} \setminus]0,1[. \quad \therefore\ x \notin \overline{]0,1[}$$

• $0 \in \overline{]0,1[}$ sillä jos $0 \in [a,b] \in \mathcal{B}$, niin $a \le 0 < b$
(koska $0 \le b$ ja $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) ja siten $[a,b] \cap]0,1[\neq \emptyset$.

• Jos $x \ge 1$, niin $\exists\, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ s.e. $b \ge x$, jolloin

$$x \in \underbrace{[1, b]}_{\in \mathcal{B}} \subset \mathbb{R} \setminus]0,1[, \quad \therefore\ x \notin \overline{]0,1[}$$

$\boxed{2p}$

(• Lisäksi aina $]0,1[\subset \overline{]0,1[}$ määr. mukaan)

3. a) f:n indusoima tgia X:ssä on $\mathcal{T} = \{ f^{-1}V \mid V \overset{\circ}{\subset} Y \}$ $\boxed{2p}$

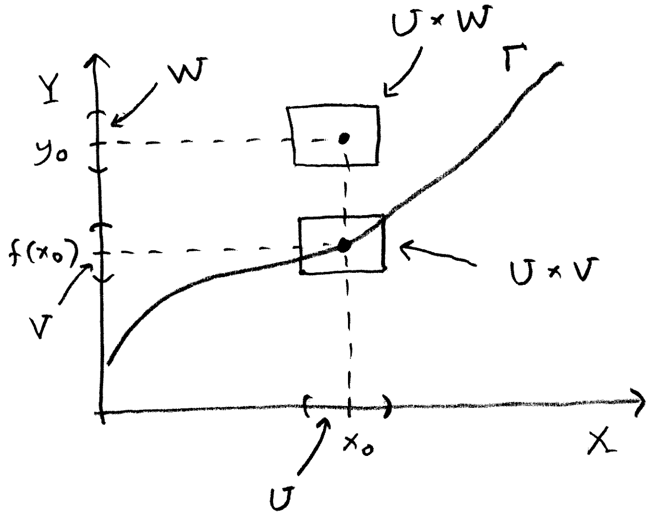
b) "$\Rightarrow$" Ol. g jva. $\mathcal{T}$:n määr. nojalla myös f on jva, Siten yhdistetty kuvaus $f \circ g$ on jva. $\boxed{1p}$

"$\Leftarrow$" Ol. $f \circ g$ jva. Jos $U \overset{\circ}{\subset} X$ (eli $U \in \mathcal{T}$) niin $U = f^{-1}V$ jollain $V \overset{\circ}{\subset} Y$. Tällöin

$$g^{-1}U = g^{-1}f^{-1}V = (f \circ g)^{-1}V \overset{\circ}{\subset} Z.$$

Siten g on jva. $\boxed{2p}$

4. Os. että $\Gamma^c = (X \times Y) \setminus \Gamma$ on avoin.



Olk. $(x_0, y_0) \in \Gamma^c$

$\Rightarrow$ $f(x_0) \neq y_0$ $\boxed{1p}$

Hausdorff-ehto $\Rightarrow$ $\exists$ V, W s.e.

$$\begin{cases} f(x_0) \in V \overset{\circ}{\subset} Y \\ y_0 \in W \overset{\circ}{\subset} Y \end{cases} \qquad V \cap W = \emptyset$$ $\boxed{1p}$

f jva x_0:ssa $\Rightarrow$ $\exists$ x_0:n ystö $U \overset{\circ}{\subset} X$ s.e. $fU \subset V$. $\boxed{1p}$

Tulotgian määr. nojalla $U \times W \overset{\circ}{\subset} X \times Y$;
lisäksi $x_0 \in U$, $y_0 \in W$ $\Rightarrow$ $(x_0, y_0) \in U \times W$ $\boxed{1p}$

Olk. $(x, y) \in U \times W$ eli $x \in U$, $y \in W$.

Tällöin $f(x) \in fU \subset V$ $\Rightarrow$ $f(x) \notin W$ $\Rightarrow$ $f(x) \neq y$

$\Rightarrow$ $(x, y) \in \Gamma^c$. $\therefore$ $U \times W \subset \Gamma^c$ $\boxed{1p}$

On siis osoitettu, että jokaisella $(x_0, y_0) \in \Gamma^c$ on olem. ystö $U \times W \subset \Gamma^c$. Siten Γ^c on avoin.