Topologia II – 1. kurssikoe (1. 3. 2013)

Huom. Tehtävät ovat aihepiirin mukaisessa järjestyksessä, joka ei välttämättä ole vaikeusjärjestys!

1. Olkoon X topologinen avaruus. Miten määritellään osajoukon $A \subset X$ sisäpisteet? Osoita: jos A ja B ovat X:n suljettuja osajoukkoja ja yhdisteellä $A \cup B$ on sisäpiste, niin A:lla tai B:llä on sisäpiste.

2. Osoita, että kokoelma

$$\mathcal{B} = \{[a, b] : a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ a < b\}$$

on $\mathbb{R}$:n erään topologian kanta. Määritä välin $]0, 1[$ sulkeuma tämän topologian suhteen. [*Huom.* $\mathbb{Q}$ on rationaalilukujen joukko.]

3. *(teoriatehtävä)* Olkoon X joukko, Y topologinen avaruus ja $f\colon X \to Y$ kuvaus.

a) Miten määritellään kuvauksen f indusoima topologia X:ssä? (Määritelmä riittää; ei tarvitse osoittaa sitä topologiaksi.)

b) Varustetaan X kuvauksen f indusoimalla topologialla. Osoita, että X:llä on seuraava ominaisuus: jos Z on topologinen avaruus ja $g\colon Z \to X$ kuvaus, niin g on jatkuva jos ja vain jos $f \circ g$ on jatkuva.

4. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia, ja oletetaan, että Y on Hausdorff. Osoita huolellisesti, että jos $f\colon X \to Y$ on jatkuva kuvaus, niin sen kuvaaja

$$\Gamma = \Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

on suljettu joukko tuloavaruudessa $X \times Y$.

[*Muista.* Hausdorff-ominaisuus tarkoittaa, että avaruudessa kahdella eri pisteellä on erilliset ympäristöt.]