Topologia II – Harjoitus 13 (29. 4. 2013)

1. Topologinen avaruus X on *täysin säännöllinen* (tai *Tihonovin avaruus*), jos se on Hausdorff ja sillä on seuraava ominaisuus: aina kun $a \in U \mathrel{\subset\!\!\!\circ} X$, niin on olemassa jatkuva $f\colon X \to [0,1]$ siten, että $f(a) = 1$ ja $f(x) = 0$ kaikilla $x \in X \setminus U$ (ks. kirjan kohta 19.3.2). Näytä, että täysin säännöllinen avaruus on aina säännöllinen. (Väisälä 19:3)

   [*Huom.* Määritelmässä Hausdorff-ominaisuuden voi korvata T_1-ominaisuudella; vrt. säännöllisyys ja normaalius.]

2. Olkoon X T_4-avaruus, $A \mathrel{\subset\!\!\!{\scriptstyle c}} X$ ja $f\colon A \to \Delta$, jossa $\Delta \subset \mathbb{R}$ on avoin väli (mahdollisesti rajaton, esim. $\Delta = \mathbb{R}$). Osoita Tietzen jatkolauseen 20.3 avulla, että f:llä on jatkuva jatke $g\colon X \to \Delta$. (Vrt. Väisälä 20:1)

   [*Juoni.* Tapauksessa $\Delta = \left]-1,1\right[$ lause 20.3 antaa jatkeen $g_1\colon X \to [-1,1]$. Etsi haluttu g muodossa $g(x) = g_1(x)h(x)$, jossa h tulee sopivasti Urysonin lemmasta 19.2. Yleisessä tapauksessa homeomorfismi auttaa.]

3. Oletetaan, että (X,d) on epätyhjä ja separoituva metrinen avaruus, jolle pätee $d(X) = \sup\{d(x,y) : x,y \in X\} \le 1$. Olkoon $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiheä joukko X:ssä. Osoita, että kaava $f(x) = (d(x,a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ määrittelee X:n upotuksen Hilbertin kuutioon $[0,1]^{\mathbb{N}}$. (Väisälä 19:6)

4. Olkoon X normaali yhtenäinen avaruus, jossa on enemmän kuin yksi alkio. Osoita Urysonin lemman avulla, että X on mahtavampi tai yhtä mahtava kuin $\mathbb{R}$ (ts. on olemassa injektio $\mathbb{R} \to X$ tai yhtäpitävästi surjektio $X \to \mathbb{R}$). (Väisälä 19:2)

   [*Apu.* Miten yhtenäisyys suhtautuu jatkuviin kuvauksiin, ja millaisia ovat $\mathbb{R}$:n yhtenäiset osajoukot?]

5. (”kertaustehtävä”) Olkoon S ylinumeroituva diskreetti avaruus. Tutki ja perustele, mitkä seuraavista ominaisuuksista avaruudella $X = [0,1]^{\mathbb{N}} \times S$ on: N_1, N_2, normaalius, kompaktius, lokaali kompaktius, metristyvyys. Vastaukset tulevat melko helposti käyttämällä sopivia tuloksia sekä avaruuksien S ja $[0,1]$ tunnettuja ominaisuuksia.

Luento ja harjoitukset pidetään ma 29. 4. tavalliseen tapaan, mutta vappuaaton ti 30. 4. luennon osalta on tulossa muutoksia − seuraa kurssin kotisivua!

Toinen kurssikoe on pe 3. 5. klo 13.00–15.00 Exactumin auditorioissa. Koealue muodostuu kirjan pykälistä 8–20 tietyin poikkeuksin, joista tarkemmin kurssin kotisivulla piakkoin.