Topologia II – Harjoitus 12 (22. 4. 2013)

1. Todista, että rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ ei ole lokaalisti kompakti. (Väisälä 17:1)

2. Olkoon X lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus. Osoita, että jos $U \overset{\circ}{\subset} X$ ja $F \overset{c}{\subset} X$, niin $U \cap F$ on lokaalisti kompakti. Samalla tulet todistaneeksi kirjan lauseen 17.5.

   Lisätehtävänä voit osoittaa kääntäen, että Hausdorffin avaruudessa jokainen lokaalisti kompakti osajoukko on yo. muotoa.

   Huom. Muotoa $U \cap F$ olevia X:n osajoukkoja kutsutaan *lokaalisti suljetuiksi* (vrt. kirjan tehtävä 5:3).

3. Olkoot X_j $(j \in J)$ epätyhjiä topologisia avaruuksia. Osoita, että jos tulo $X = \prod_{j \in J} X_j$ on kompakti, niin jokainen X_j on kompakti. (Väisälä 18:3)

4. Varustetaan tulo $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ ”laatikkotopologialla”, jonka kantana ovat *kaikki* joukot $U_1 \times U_2 \times \cdots$, jossa $U_n \overset{\circ}{\subset} [0,1]$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ (ks. kirjan kohta 7.3). Osoita, että X ei ole lokaalisti kompakti eikä siten kompakti. Onko X Lindelöf?

5. Olkoon K kompakti joukko avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{pa}})$, jossa $\mathcal{T}_{\mathrm{pa}}$ on ”puoliavoin topologia” (ks. kirjan kohta 2.11.1). Näytä, että K on numeroituva.

   [*Vihje.* Jos $x \in K$, niin joukkoja $]-\infty, x-\delta[$ $(\delta > 0)$ ja $[x, \infty[$ käyttämällä voi todeta, että on olemassa väli $]a_x, x[$, joka ei leikkaa K:ta.]