Topologia II – Harjoitus 11 (15. 4. 2013)

1. Olkoot K_1 ja K_2 topologisen avaruuden X kompakteja osajoukkoja. Näytä, että $K_1 \cup K_2$ on kompakti. (Väisälä 15:2)

2. Olkoon X topologinen avaruus ja $a \in X$. Oletetaan, että $X \setminus U$ on kompakti aina kun U on a:n ympäristö. Osoita, että X on kompakti. (Väisälä 15:5)

3. Olkoon X joukko varustettuna kofiniitilla topologialla (ks. harj. 1, teht. 6). Näytä, että jokainen X:n osajoukko on kompakti ja siten Lindelöf. (Väisälä 15:3; vrt. myös harj. 10, teht. 5.)

4. Metrinen avaruus (X, d) on *prekompakti* eli *totaalisti rajoitettu*, jos se voidaan aina peittää äärellisellä määrällä ϵ-säteisiä kuulia $B(x_j, \epsilon)$, olipa $\epsilon > 0$ kuinka pieni tahansa. Tällöin sanotaan, että keskipisteet x_j muodostavat *ϵ-verkon* X:ssä. Osoita, että prekompakti avaruus on aina rajoitettu ja että $\mathbb{R}^n$:n rajoitettu osajoukko on prekompakti. (Vrt. Väisälä 10:12)

5. Osoita, että metrinen avaruus on (jono)kompakti jos ja vain jos se on prekompakti ja täydellinen. (Väisälä 16:1)