Topologia II – Harjoitus 10 (8. 4. 2013)

1. Esitä jokin (mielellään mahdollisimman havainnollinen) todistus sille, että joukko $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_n) : x_n = 0 \text{ tai } 1 \text{ jokaisella } n \in \mathbb{N}\}$ on ylinumeroituva. Päättele, että luonnollisten lukujen joukon potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A : A \subset \mathbb{N}\}$ on ylinumeroituva.

   [*Ehdotus.* Vastaoletus ja diagonaaliargumentti.]

2. Todista kirjan lause 12.11: ominaisuudet N_1 ja N_2 periytyvät osajoukkoihin. (Väisälä 12:1)

3. Osoita, että jos topologisella avaruudella X on numeroituva esikanta, niin se on N_2. (Väisälä 12:4)

4. Olkoon $X = \mathbb{R} \times [0, \infty[$ ns. Niemytzkin taso, jonka topologian kannan muodostavat tavalliset kiekot $B\big((x,y), r\big)$, jossa $x \in \mathbb{R}$ ja $0 < r \leq y$, sekä joukot $U(x,r) = \{(x,0)\} \cup B\big((x,r), r\big)$, jossa $x \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$. Todista, että X on a) N_1 ja b) separoituva mutta c) ei N_2 eikä Lindelöf.

   [Voit pitää tunnettuna, että annetut joukot todella kelpaavat kannaksi. Luennolla osoitettiin, että X on säännöllinen mutta ei normaali.]

5. Varustetaan joukko X kofiniitilla topologialla (ks. harj. 1, teht. 6). Osoita:

   a) X on aina separoituva.

   b) Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät: i) X on N_1, ii) X on N_2 ja iii) X on numeroituva.

Pääsiäisloma 28. 3.–3. 4. Luennot ja harjoitukset jatkuvat pääsiäisen jälkeen ma 8. 4.