Topologia II – Harjoitus 9 (25. 3. 2013)

1. Onko Hausdorffin avaruudessa *kolmella* eri pisteellä aina erilliset ympäristöt?

2. Osoita, että avaruus X on Hausdorff jos ja vain jos lävistäjä $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ on suljettu joukko tuloavaruudessa $X \times X$. (Väisälä 11:9)

3. Näytä, että T_4-ominaisuus periytyy suljettuihin osajoukkoihin: jos X on T_4 ja $A \Subset X$, niin A relatiivitopologiallaan varustettuna on T_4. (Vrt. Väisälä 11:12)

4. Varustetaan $\mathbb{R}$ ”puoliavoimella topologialla” $\mathcal{T}_{\text{pa}}$ (ks. kirjan kohta 2.11.1). Osoita, että se on normaali avaruus. (Väisälä 11:14)

   [*Ohje.* Olkoot A ja B erillisiä suljettuja joukkoja. Valitse jokaisella $x \in A$ väli $[x, x + r(x)[$, joka ei kohtaa B:tä, ja tutki näiden välien yhdistettä sekä vastaavalla tavalla B:stä muodostettua joukkoa.]

5. Kirjoitetaan $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ ja määritellään $f_n(x) = (x - q_n)^{-1}$ kaikilla reaaliluvuilla $x \neq q_n$ ja $n \in \mathbb{N}$. Kun $x, y \in \mathbb{J} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irrationaalilukujen joukko), asetetaan

   $$\rho(x,y) = |x-y| + \max\Big\{\min\{1/n,\ |f_n(x) - f_n(y)|\} : n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

   Todista:

   a) ρ on $\mathbb{J}$:n metriikka.
   b) ρ:n määrittelemä topologia on $\mathbb{J}$:n tavallinen topologia.
   c) $(\mathbb{J}, \rho)$ on täydellinen.

   Tämän perusteella $\mathbb{J}$ toteuttaa Bairen lauseen 10.8 väitteen, joten sitä voitaisiin kutsua ”Bairen avaruudeksi”. Vertaa: Edellisten harjoitusten 5. tehtävän ratkaisu (tai kirjan lauseen 10.10 todistus) osoittaa, että $\mathbb{Q}$ ei ole ”Bairen avaruus”.

   [*Ohje.* a-kohta riittänee käsitellä melko kevyesti. b-kohdassa lienee hyödyksi huomata, että jokainen f_n on jatkuva tavallisen topologian suhteen.]