Topologia II – Harjoitus 8 (18. 3. 2013)

1. Määritellään $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$ kaavalla $f(x) = x^2$. Mitkä ovat f:n säikeet? Mitä ovat f:n kanonisessa hajotelmassa $f = f^* \circ p$ esiintyvät kuvaukset f^* ja p (ks. kirjan kohta 9.9)? Onko f^* homeomorfismi?

2. Olkoon $n \geq 1$ ja $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\}$ ("punkteerattu" $\mathbb{R}^{n+1}$). Kun $x \in X$, määritellään $\pi(x) = \{tx : 0 \neq t \in \mathbb{R}\}$. Tällöin $Y = \{\pi(x) : x \in X\}$ on X:n ositus. Näytä, että tekijäavaruutena Y on homeomorfinen projektiivisen avaruuden P^n kanssa.

   [*Ohje.* Tarkastele tekijäkuvauksen π rajoittumaa $S^n \to Y$, jossa $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$. Tai vaihtoehtoisesti rakenna sopiva samastuskuvaus $X \to P^n$ projektiiviseen avaruuteen liittyvästä tekijäkuvauksesta $p\colon S^n \to P^n$ ja kuvauksesta $x \mapsto x/|x|\colon X \to S^n$. Käytä lausetta 9.10.]

3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita, että metriikan määrittelemä topologia $\mathcal{T}_d$ on sama kuin kokoelman $\{d_x : x \in X\}$ indusoima topologia, kun $d_x\colon X \to [0, \infty[$, $d_x(y) = d(x, y)$.

4. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Todista, että se on täydellinen, jos ja vain jos seuraava ehto on voimassa: aina kun $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ovat X:n suljettuja epätyhjiä osajoukkoja ja $\lim_{n\to\infty} d(A_n) \to 0$, niin $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. Muista, että epätyhjän joukon A läpimitta on $d(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$. (Väisälä 10:8)

5. a) Perustele, että rationaalilukujen joukossa $\mathbb{Q}$ ei ole sellaista täydellistä metriikkaa, jonka indusoima topologia olisi tavallinen topologia. [*Vihje.* Baire ja yksiöiden komplementit.]

   b) Onko $\mathbb{Q}$:ssa *lainkaan* täydellisiä metriikkoja?