Topologia II – Harjoitus 6 (25. 2. 2013)

1. Olkoot X, Y ja Z topologisia avaruuksia. Näytä, että $X \times Y \times Z \approx (X \times Y) \times Z$. Nämä tuloavaruudet ovat siis homeomorfisia ja voidaan käytännössä samastaa. (Väisälä 7:3)

   [Edistyneemmät voivat yhtä hyvin tehdä tämän tehtävän yleistyksen (Väisälä 7:4).]

2. Olkoon $X = \prod_{j \in J} X_j$ tuloavaruus ja $A_j \subset X_j$ jokaisella $j \in J$, jolloin $A = \prod_{j \in J} A_j$ on X:n osajoukko. Osoita, että $\overline{A} = \prod_{j \in J} \overline{A_j}$. (Väisälä 7:2)

3. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia sekä $f \colon X \to Y$ jatkuva. Näytä, että f:n kuvaaja

   $$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

   on homeomorfinen X:n kanssa. (Väisälä 7:6)

4. Olkoon X tuloavaruus $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Tutki, ovatko seuraavat joukot avoimia tai suljettuja: $E = \{f \in X : f \text{ on kasvava}\}$, $F = \{f \in X : f \text{ on aidosti kasvava}\}$.

5. Olkoon X kuten edellä ja $A \subset X$ kaikkien äärellisten $\mathbb{R}$:n osajoukkojen karakterististen funktioiden joukko: $A = \{\chi_E : E \subset \mathbb{R} \text{ ja } E \text{ on äärellinen}\}$.

   a) Osoita, että vakiofunktio $g \equiv 1$ kuuluu A:n sulkeumaan.
   b) Osoita, ettei mikään A:n jono suppene kohti g:tä. [*Tieto.* $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva.]
   c) Päättele, ettei X ole metristyvä.

   (Vrt. Väisälä 7:5.)

1. kurssikoe pidetään pe 1. 3. klo 13.00–15.00 Exactumin auditorioissa. Viimeinen koealueeseen kuuluva asia on tulotopologia (kirjan jakso 7) ja siihen liittyvät harjoitukset. Luettelo koealueeseen kuulumattomista kirjan kohdista tulee kurssin kotisivulle.

Luennot ja harjoitukset pidetään normaaliin tapaan ma 25. 2. ja ti 26. 2.