Topologia II – Harjoitus 5 (18. 2. 2013)

1. Perustele, että $\mathbb{R}$ ja $]0,1]$ (tavallisilla topologioilla varustettuina) eivät ole homeomorfiset. Voit käyttää hyväksi analyysin kursseilla opittuja asioita.

2. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja $f\colon X \to Y$ kuvaus. Oletetaan, että $(A_j)_{j\in J}$ on X:n *lokaalisti äärellinen suljettu peite*:

   i) $A_j \Subset X$ jokaisella $j \in J$
   ii) $\bigcup_{j\in J} A_j = X$
   iii) jokaisella $x \in X$ on ympäristö U_x, jolle $U_x \cap A_j \neq \emptyset$ vain äärellisen monella $j \in J$.

   Osoita: jos rajoittuma $f|A_j$ on jatkuva jokaisella $j \in J$, niin f on jatkuva. (Vrt. lause 5.13.)

   [*Apu.* Luennolla todettiin, että jos (U_j) on jokin X:n *avoin peite* (ts. avoimista joukoista U_j koostuva peite) ja $f|U_j$ on jatkuva jokaisella j, niin f on jatkuva. Saat käyttää tätä tulosta apuna, mikäli olet varma, että osaat sen tarvittaessa todistaa.]

3. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja $f\colon X \to Y$ injektio. Osoita, että f on upotus jos ja vain jos X:n topologia on f:n Y:stä indusoima. (Väisälä 5:8)

4. Olkoon X joukko ja Y topologinen avaruus. Mikä on kaikkien vakiokuvausten $f\colon X \to Y$ kokoelman indusoima X:n topologia? (Väisälä 6:6)

5. Onko olemassa kuvausta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka indusoi $\mathbb{R}$:ään (lähtöjoukko) diskreetin topologian, kun maalissa $\mathbb{R}$ on varustettu tavallisella topologialla?

6. a) Oletetaan, että X:ssä on kuvausten $f_j\colon X \to Y_j$ $(j \in J)$ indusoima topologia, jossa Y_j:t ovat Hausdorffin avaruuksia ja J on epätyhjä indeksijoukko. Osoita, että X on Hausdorff jos ja vain jos jokaista kahta eri pistettä $x, y \in X$ kohti on olemassa $j \in J$ siten, että $f_j(x) \neq f_j(y)$. (Väisälä 6:4)

   [*Huom.* Ehto voidaan ilmaista sanomalla, että perhe $(f_j)_{j\in J}$ ”erottelee X:n pisteet”.]

   b) Päättele, että tuloavaruus $\prod_{j\in J} X_j$ on Hausdorff, jos jokainen X_j on Hausdorff.