Topologia II – Harjoitus 4 (11. 2. 2013)

1. Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ avoin väli ja $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että f on avoin jos ja vain jos se on aidosti monotoninen (eli aidosti vähenevä tai aidosti kasvava). Käytä hyväksi analyysin kursseilla opittuja tietoja.

2. Olkoon X topologinen avaruus. Osajoukon $A \subset X$ *karakteristinen funktio* $\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$ määritellään asettamalla $\chi_A(x) = 1$ kaikilla $x \in A$ ja $\chi_A(x) = 0$ kaikilla $x \notin A$. Osoita, että ∂A on χ_A:n epäjatkuvuuskohtien joukko, ts. χ_A on jatkuva pisteessä $x \in X$ jos ja vain jos $x \notin \partial A$. (Väisälä 3:2)

3. Olkoon $a \in B^n$. Osoita, että yhtälö $f(x) = (1 - |x|)a + x$ määrittelee homeomorfismin $f\colon \overline{B}^n \to \overline{B}^n$, jolle $f(\bar{0}) = a$ ja $f|S^{n-1} = \mathrm{id}$. Millaisiksi joukoiksi f kuvaa $\overline{B}^n$:n säteet? Piirrä kuva tapauksessa $n = 2$. (Väisälä 3:12)

   Käytetyt merkinnät: $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$, kun $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$; $\overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$; $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

4. Todista oppikirjan lause 4.8, joka kuuluu seuraavasti: Olkoon X:ssä kuvauksen $f\colon X \to Y$ indusoima topologia. Jos $\mathcal{B}$ on Y:n kanta, niin $\{f^{-1}B : B \in \mathcal{B}\}$ on X:n kanta. Jos $\mathcal{A}$ on Y:n esikanta, niin $\{f^{-1}A : A \in \mathcal{A}\}$ on X:n esikanta. (Väisälä 4:1)

5. Olkoon $f\colon X \to Y$, jossa X on joukko ja $(Y, \mathcal{T}')$ topologinen avaruus. Luennolla näytettiin (ks. kirjan lause 4.6), että f:n indusoimalla X:n topologialla $\mathcal{T}$ on seuraava *universaalisuusominaisuus*:

   > Jos $(Z, \mathcal{T}'')$ on mielivaltainen topologinen avaruus ja $g\colon Z \to X$ on kuvaus, niin g on jatkuva täsmälleen silloin kun $f \circ g$ on jatkuva.

   Täydennä lauseen todistus osoittamalla, että $\mathcal{T}$ on *ainoa* X:n topologia, jolla on tämä ominaisuus. [*Ohje.* Valitse $Z = X$ ja $g = \mathrm{id}$ sekä Z:lle sopivia topologioita.]

6. Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset B \subset X$. Osoita, että jos A on tiheä B:ssä, niin se on tiheä $\overline{B}$:ssä. (Väisälä 5:6)