Topologia II – Harjoitus 3 (4. 2. 2013)

1. a) Olkoon $\mathcal{B}$ topologisen avaruuden X kanta. Osoita, että osajoukko $A \subset X$ on tiheä, mikäli se leikkaa jokaista $\mathcal{B}$:n epätyhjää jäsentä.

   b) Näytä esimerkillä $\mathbb{R}$:ssä, että a-kohdan väite ei välttämättä pidä paikkaansa, jos kannan sijasta tarkastellaan vain esikantaa.

2. Olkoon X joukko, jossa on ainakin kaksi alkiota. Osoita, että kokoelma
$$\mathcal{A} = \{X \setminus \{x\} : x \in X\}$$
   on X:n kofiniitin topologian (ks. harj. 1, teht. 6) esikanta.

3. Varustetaan luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ kofiniitillä topologialla. Mitä $\mathbb{N}$:n pisteitä kohti jono $(1, 2, 3, \ldots)$ suppenee? (Vrt. Väisälä 3:19)

4. Tutki, ovatko kaavojen $f(x) = e^x$ ja $g(x) = -x$ määrittelemät funktiot $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvia, kun sekä lähdössä että maalissa $\mathbb{R}$ varustetaan ”puoliavoimella topologialla” $\mathcal{T}_{\mathrm{pa}}$, joka on määritelty oppikirjan kohdassa 2.11.1. (Vrt. Väisälä 3:5)

5. Osoita, että projektio $\mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathrm{pr}_1(x_1, x_2) = x_1$, on avoin mutta ei suljettu kuvaus tavallisten topologioiden suhteen. (Väisälä 3:6)

6. Kun $a \in \mathbb{Z}$ ja $b \in \mathbb{N}$, määritellään
$$N(a, b) = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}.$$
   Tällaista joukkoa, tai paremminkin sitä vastaavaa (kaksisuuntaista) jonoa $(\ldots, a - 2b, a - b, a, a + b, a + 2b, \ldots)$, kutsutaan *aritmeettiseksi jonoksi.*

   a) Osoita, että joukot $N(a, b)$ muodostavat erään topologian kannan kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}$.

   b) Osoita, että em. topologialla on seuraavat ominaisuudet: i) jokainen avoin ja epätyhjä $\mathbb{Z}$:n osajoukko on ääretön, ii) jokainen kantajoukko $N(a, b)$ on suljettu (ja tietysti myös avoin).

   c) Olkoon $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$ alkulukujen joukko; ts. $\mathbb{P}$ koostuu niistä luonnollisista luvuista $p \geq 2$, jotka eivät ole jaollisia muilla luonnollisilla luvuilla kuin 1 ja p. Perustele, että
$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N(0, p).$$

   d) Päättele b- ja c-kohdan avulla, että $\mathbb{P}$ on ääretön.