

Topologia II – Harjoitus 2 (28. 1. 2013)

1. Todista (kertaa Topologia I:stä) oppikirjan lauseen 1.12 kohdat (6)–(9). Käytä hyväksi määritelmiä ja kohtia (1)–(5).
2. Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset X$. Todista:
 - a) $\partial\partial A \subset \partial A$.
 - b) Jos A on suljettu, niin $\partial\partial A = \partial A$.
 - c) $\partial\partial\partial A = \partial\partial A$.Osoita esimerkillä $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, että a-kohdassa ei aina päde yhtäsuuruus. (Väisälä 1:9)
3. Varustetaan joukko $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ kofinitillä topologialla (harj. 1, teht. 6). Määritä $\text{int } A$, \bar{A} ja ∂A avaruudessa \mathbb{N} , kun $A = \{1, 2\}$.
4. Osoita, että välit $[a, b[$, jossa $a < b$, ovat avoimia ja suljettuja avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pa}})$. Määritä välin $]0, 1[$ sulkeuma ja reuna tässä avaruudessa. (Väisälä 2:1)
[*Muista.* \mathcal{T}_{pa} on ns. puoliavoin topologia, joka on määritelty oppikirjan kohdassa 2.11.1.]
5. a) Osoita, että vaakasuorat janat

$$J(a, b, c) = \{(x, c) : a < x < b\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a < b,$$

muodostavat tason \mathbb{R}^2 erään topologian \mathcal{T} kannan.

- b) Vertaa topologiaa \mathcal{T} tason tavalliseen topologiaan: Onko se hienompi, karkeampi tai sama kuin tavallinen topologia? [*Vihje.* Kannat.]
6. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä seuraavien joukkojen sisukset (eli sisäpisteet) ja sulkeumat topologian \mathcal{T} suhteen: $A = \{(x, 0) : 0 < x < 1\}$, $B = \{(0, y) : 0 < y < 1\}$, $C = B(0, 1) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. (Vrt. Väisälä 2:3)

Kurssikokeet pidetään pe 1. 3. klo 13.00–15.00 ja pe 3. 5. klo 13.00–15.00.