Topologia 1, harjoitus 6, ratkaisuehdotuksia
Lauri Hitruhin, lauri.hitruhin@helsinki.fi

Tehtävä 1

Olkoon $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Määritä joukon A kasautumispisteet ja sulkeuma $\bar{A}$, kun joukossa R on diskreetti $\{0,1\}$-metriikka (Väisälä, Esim. 2.3.2).

Ratkaisu: Olkoon $x \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Tällöin $B(x, \frac{1}{2}) = x$, joten jokainen yksiö $\{x\}$ on avoin joukko. Tällöin pätee että A:n komplementti on avoin, joten A on suljettu, eli $\bar{A} = A$. Tutkitaan seuraavaksi kasautumispisteitä. Koska mielivaltainen yksiö $\{x\}$ on itsessään avoin joukko, niin jokaisella pisteellä on olemassa ympäristö joka sisältää vain kyseisen pisteen. Siis joukolla A ei voi olla kasautumispisteitä.

Tehtävä 2

(6:14 osa) Määritä joukon A kasautumispisteet tasossa $\mathbb{R}^2$, kun 1: $A = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, 2: $A = \mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$. Edellä $\mathbb{Z}$ on kokonaislukujen joukko, ja $\mathbb{Q}$ rationaalilukujen joukko.

Ratkaisu: Tapauksessa 1 olkoon $y \neq x,\ x, y \in A$. Tällöin näiden pisteiden etäisyydelle pätee $d(x, y) \geq 1$. Olkoon nyt $z \in \mathbb{R}^2$ mielivaltainen ja valitaan z:lle ympäristö $B(z, \frac{1}{3})$. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla vain yksi piste joukosta A voi kuulua kyseiseen ympäristöön, joten z ei ole kasautumispiste. Täten A :lla ei ole kasautumispisteitä.

Tapauksessa 2 olkoon $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ sellainen, että $y \notin \mathbb{Z}$. Tällöin y:n etäisyys lähimmästä kokonaisluvusta on jokin vakio $\delta > 0$. Nyt valitaan z:lle ympäristö $B(z, \frac{\delta}{2})$ ja huomataan että kyseiseen ympäristöön ei kuulu lainkaan joukon A pisteitä. Siis tätä muotoa olevat pisteet eivät ole kasautumispisteitä.
Toisaalta olkoon nyt $z = (x, y)$ selllainen että y on kokonaisluku. Tällöin kun $r > 0$, niin pätee $]x - r, x + r[\, \times \{y\} \subset B(z, r)$. Koska rationaaliluvut ovat tiheässä reaalilukujen joukossa jokaiselta avoimelta janalta $(x - r, x + r)$ löytyy äärettömän monta rationaalilukupistettä, joten joukkoon $]x-r, x+r[\times\{y\}$ kuuluu äärettömän monta joukon A pistettä. Siis jokainen tätä muotoa oleva piste on kasautumispiste.

Tehtävä 3

Olkoon E sisätuloavaruus ja $A \subset E$ epätyhjä osajoukko. näytä, että ortokomplementti $A^{\perp} = \{y \in E : y \cdot x = 0 \ \forall x \in A\}$ on suljettu joukko E:ssä.
Apu: $A^{\perp} = \cap_{x \in A} f_x^{-1}(\{0\})$, missä $f_x(y) = x \cdot y$ kun $y \in E$. Muista että jokainen kuvaus f_x on jatkuva (HT 4:4).

Ratkaisu: Osoitetaan ensin, että $A^{\perp} = \cap_{x \in A} f_x^{-1}(\{0\})$. Jos $y \in A^{\perp}$ niin $y \cdot x = 0 \ \forall x \in A$, tästä seuraa että $f_x(y) = y \cdot x = 0$ kaikilla $x \in A$. Tällöin $y \in f_x^{-1}(\{0\})$ kaikilla $x \in A$, joten $y \in \cap_{x \in A} f_x^{-1}(\{0\})$. Vastaavasti jos $y \in \cap_{x \in A} f_x^{-1}(\{0\})$, niin $f_x(y) = y \cdot x = 0$ kaikilla $x \in A$, joten $y \in A^{\perp}$ suoraan $A^{\perp}$:n määritelmän nojalla. Siis pätee että $A^{\perp} = \cap_{x \in A} f_x^{-1}(\{0\})$.
Nyt koska jokainen funktio f_x on jatkuva niin suljetun joukon alkukuva on suljettu joukko, joten erityisesti $f_x^{-1}(\{0\})$ on suljettu joukko kaikilla $x \in A$. Nyt koska mielivaltainen suljettujen joukkojen leikkaus on suljettu saadaan että $\cap_{x \in A} f_x^{-1}(\{0\})$ on suljettu, joka todistaa väitteen.

Tehtävä 4

Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $A \subset X$ joukko ja $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$ sen komplementtijoukko. Näytä: A on avoin X:ssä jos ja vain jos etäisyys $r(x) = d(x, A^c) > 0$ kaikilla $x \in A$.
Vihje: jos $r(x) > 0$, niin avoin kuula $B(x, r(x)) \subset A$. (Piirrä kuva!)
Huomautus. Tehtävässä täytyy lisäksi olettaa, että A on aito osajoukko, eli että on olemassa jokin piste $x \in X$ siten että $x \notin A$. Muuten komplementti on tyhjä ja etäisyyttä $d(x, A^c)$ ei ole määritelty.

Ratkaisu: Oletetaan, että A on avoin. Tällöin kaikilla $x \in A$ on olemassa säde $i_x > 0$ siten että $B(x, i_x) \subset A$. Mutta tällöin erityisesti $d(x, A^c) \geq i_x > 0$. Koska x oli mielivaltainen, niin väite $r(x) > 0$ pätee kaikilla $x \in A$.
Oletetaan nyt , että kaikilla $x \in A$ pätee $r(x) = d(x, A^c) > 0$. Tällöin avoin kuula $B(x, r(x)) \subset A$, sillä jos näin ei olisi niin kuulan sisältä löytyisi jokin komplementin piste ja kuulan määritelmän nojalla tämän pisteen etäisyys keskipisteeseen on pienempi kuin kuulan säde. Joten jokaisella pisteellä $x \in A$ on olemassa ympäristö siten että kyseinen ympäristö on A:n osajoukko. Siis A on avoin ja väite pätee.

Tehtävä 5

Olkoon E sisätuloavaruus, ja $u \cdot v$ on sisätulo kun $u, v \in E$. Näytä: jos f ja g ovat jatkuvia kuvauksia $E \to E$, niin kuvaus $f \cdot g : E \to R, \ x \mapsto f(x) \cdot g(x), x \in E$ on jatkuva avaruudessa E.
Vihje: tarkista ensin että $4u \cdot v = \mid u + v \mid^2 - \mid u - v \mid^2$ kun $u, v \in E$, sekä käytä luvun 5

jatkuvuustuloksia.

Ratkaisu: Käytetään normin määritelmää ja lasketaan vihjeen oikea puoli auki.
$| u+v |^2 - | u-v |^2 = (u+v)\cdot(u+v)-(u-v)\cdot(u-v) = u\cdot u+2(u\cdot v)+v\cdot v-(u\cdot u-2u\cdot v+v\cdot v) = 4u \cdot v$.
Joten erityisesti $(f \cdot g)(x) = \frac{1}{4}(| f(x)+g(x) |^2 - | f(x)-g(x) |^2)$. Koska f ja g ovat jatkuvia niin sekä $f+g$ että $f-g$ ovat jatkuvia. Normikuvaus osoitettiin jatkuvaksi harjoitusten 4 tehtävän 5 ratkaisuehdotuksessa, joten $| f(x) + g(x) |$ ja $| f(x) - g(x) |$ ovat jatkuvia kahden jatkuvan kuvauksen yhdistettynä kuvauksena. Tällöin myös $| f(x) + g(x) |^2$ ja $- | f(x) - g(x) |^2$ ovat jatkuvia. Koska kahden jatkuvan funktion summa on jatkuva ja vakiolla kertominen säilyttää jatkuvuuden, niin $f \cdot g$ on jatkuva kuvaus.

Tehtävä 6

(6:12 variaatio) Olkoon $f, g : X \to Y$ jatkuvia kuvauksia, missä X ja Y ovat metrisiä avaruuksia. Osoita: (1) joukko $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ on suljettu X:ssä.
(2) Jos $B \subset X$ on sellainen osajoukko, että rajoittumille pätee $f|B = g|B$, niin myös $f|\bar{B} = g|\bar{B}$.
Vihje: jos $x \in A^c$ niin etsi jatkuvuuden nojalla sellainen avoin kuula $B(x, r)$, että $f(B(x, r)) \cap g(B(x, r)) = \emptyset$.

Ratkaisu: Oletetaan, että on olemassa $x \in X$, siten että $f(x) \neq g(x)$. Tällöin voidaan valita $f(x)$:lle ja $g(x)$:lle ympäristöt $U_x = B(f(x), \epsilon)$ ja $V_x = B(g(x), \epsilon)$, jolloin $U_x \cap V_x = \emptyset$, kun valitaan $\epsilon = \frac{d(f(x), g(x))}{2}$. Joukot $f^{-1}(U_x)$ ja $g^{-1}(V_x)$ ovat avoimia, joten myös joukko $f^{-1}(U_x) \cap g^{-1}(V_x)$ on avoin ja lisäksi epätyhjä, koska $x \in f^{-1}(U_x) \cap g^{-1}(V_x)$. On siis olemassa luku $r_x > 0$, jolla $B(x, r_x) \subset f^{-1}(U_x) \cap g^{-1}(V_x)$. Nyt $f(B(x, r_x)) \subset U_x$ ja $g(B(x, r_x)) \subset V_x$, joten $f(B(x, r_x)) \cap g(B(x, r_x)) = \emptyset$, jolloin $B(x, r_x) \subset A^c$. Joten joukko A on suljettu, sillä mielivaltaiselle komplementin pisteelle löytyi ympäristö joka kuuluu komplementtiin, eli komplementti on avoin joukko.

Kohta 2: Jos x kuuluu B:hen, niin $f(x) = g(x)$, eli x kuuluu myös A:han. Mutta koska A on suljettu, pätee että

$$B \subset A \to \bar{B} \subset A.$$

Mutta tämä tarkoittaa, että $f(x) = g(x)$ myös $\bar{B}$:n alkioilla eli $f|_{\bar{B}} = g|_{\bar{B}}$.