Topologia I
Harjoitus 9
Viikko 15 (8.4.-12.4.2013)
Ratkaisuehdotuksia (OT), 6 sivua

1. (osin 11:5) Tutki, suppenevatko seuraavat jonot (x_n) avaruuden $\mathbb{R}^3$ euklidisessa metriikassa. Myönteisessä tapauksessa määritä jonon raja-arvo.
(i) $x_n = (\frac{1}{n}, e^{-n}, (-1)^n)$,
(ii) $x_n = (\frac{1}{n}, e^{-n}, n)$,
(iii) $x_n = (\sin(1+\frac{1}{n}), 1, \frac{1}{n^3})$.

Ratkaisu. Tehtävä saadaan ratkaistua hyödyntämällä Lausetta 11.11, jonka mukaan tehtävän jokaiseen jonoon (x_n) liittyvät suppenemiskysymykset palautuvat projektiojonoihin $(\mathrm{pr}_1(x_n))$, $(\mathrm{pr}_2(x_n))$ ja $(\mathrm{pr}_3(x_n))$. Näihin jonoihin puolestaan pystymme hyödyntämään kurssilla Analyysi I opittuja tietoja.

(i) Jono (x_n) ei suppene. Tämän osoittamiseksi tarvitsee tutkia vain jonoa $(\mathrm{pr}_3(x_n)) = ((-1)^n)$. Huomataan, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $x_{2n} = 1 \in B(1, 1/2)$ ja $x_{2n+1} = -1 \in B(-1, 1/2)$. Siten ei ole olemassa sellaista lukua $n_0 \in \mathbb{N}$, että $x_n \in B(a, 1/2)$ kaikilla $n \geq n_0$ ja jollakin $a \in \mathbb{R}$, joten jono $(\mathrm{pr}_3(x_n))$ ei suppene. Edelleen Lauseen 11.11 nojalla jono (x_n) ei suppene.

Jonon $(\mathrm{pr}_3(x_n))$ suppenemattomuuden voi myös nähdä lauseiden 11.4 ja 11.17 nojalla: jonolla $(\mathrm{pr}_3(x_n))$ on eri pisteisiin suppenevat vakio-osajonot (1) ja (-1), joten itse jono $(\mathrm{pr}_3(x_n))$ ei voi supeta.

(ii) Jono (x_n) ei suppene. Tutkitaan jonoa $(\mathrm{pr}_3(x_n)) = (n)$. Kurssin Analyysi I tietojen nojalla tiedämme, että suppenevan reaalilukujonon tulee olla rajoitettu ja että jono $\mathrm{pr}_3(x_n)$ ei ole rajoitettu. Siten jono $(\mathrm{pr}_3(x_n))$ ei suppene, joten Lauseen 11.11 nojalla jono (x_n) ei suppene.

(iii) Jono (x_n) suppenee. Kurssin Analyysi I nojalla tiedämme, että on voimassa $1 \to 1$, $1/(n^3) \to 0$ ja

$$1 + \frac{1}{n} \to 1. \tag{1}$$

Siten näemme, että pätee $\mathrm{pr}_2(x_n) \to 1$ ja $\mathrm{pr}_3(x_n) \to 0$. Kurssin Analyysi I nojalla tiedämme lisäksi, että sinifunktio on jatkuva, joten Lauseen 11.8 ja raja-arvon (1) nojalla on voimassa

$$\mathrm{pr}_1(x_n) = \sin\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \sin(1).$$

Yhdistämällä edelliset havainnot ja käyttämällä Lausetta 11.11 saadaan siis $x_n \to (\sin(1), 1, 0)$. $\square$

2. (11:4) Olkoon joukko X varustettuna diskreetillä $\{0,1\}$-metriikalla d. Millä ehdolla avaruuden X pistejono (x_n) suppenee metriikan d suhteen?

Ratkaisu. Olkoon (x_n) avaruuden (X,d) suppeneva jono, ja merkitään $a := \lim_{n\to\infty} x_n$. Tällöin siis jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että kaikilla $n \geq n_\varepsilon$ on voimassa $x_n \in B(a,\varepsilon)$. Erityisesti siis on olemassa sellainen $n_1 \in \mathbb{N}$, että kaikilla $n \geq n_1$ on voimassa $x_n \in B(a,1) = \{a\}$. Toisin sanoen on olemassa sellainen $n_1 \in \mathbb{N}$, että $x_n = a$ kaikilla $n \geq n_1$. Jokaisen avaruuden (X,d) suppenevan jonon on siis oltava vakiojono lukuunottamatta äärellistä määrää indeksejä.

Olkoon sitten (y_n) sellainen avaruuden (X,d) jono, että on voimassa $y_n = b \in X$ lukuunottamatta äärellistä määrää indeksejä n. Tällöin joukko $A = \{n \in \mathbb{N} \; : \; y_n \neq b\}$ on siis äärellinen, joten voidaan valita luku $m = \max A$. Siten jokaisella $\varepsilon > 0$ ja $n \geq m$ on voimassa $y_n = b \in B(b,\varepsilon)$, joten suppenemisen määritelmän nojalla pätee $y_n \to b$. Siten jokainen jono, joka on vakiojono lukuunottamatta äärellistä määrää indeksejä, suppenee avaruudessa (X,d).

Yhdistämällä edelliset havainnot saadaan poikkeuksellisen tarkka suppenemisehto:

$$x_n \to a \iff x_n \neq a \text{ vain äärellisen monella indeksillä } n.$$

Yleensä jonojen suppenemista ei voida karakterisoida näin tarkasti, mutta kuten olemme jo aiemmin huomanneet, monet ehdot saavat yksinkertaisemman muodon diskreeteissä avaruuksissa. $\square$

3. Tarkastellaan funktiojonoa (f_n) jatkuvien funktioiden muodostamassa normiavaruudessa $C[0,1]$, missä $f_n(t) = e^{t/n}$ kun $t \in [0,1]$ ja $n \in \mathbf{N}$. Näytä, että $f_n \to 1$ kun $n \to \infty$ max-normin $|\cdot|_\infty$ suhteen, missä $|g|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |g(t)|$ kun $g \in C[0,1]$ ja $1(t) = 1$ kaikilla $t \in [0,1]$. *Muistutus:* väliarvolauseesta on hyötyä.

Ratkaisu. Tehtävässä tutkitaan siis metristä avaruutta $(C[0,1], d)$, jossa metriikka d on määritelty ehdolla $d(f,g) = |f-g|_\infty$. Ratkaistaan tehtävä kahdella tavalla, joista ensimmäinen tapa käyttää vihjeen mukaisesti väliarvolausetta ja toinen tapa nojautuu muihin kurssin Analyysi I tuloksiin.

Tapa 1.
Huomataan heti, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$|f_n - 1|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - 1(t)| = \max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_n(0)|.$$

Eksponenttifunktion ja funktion $x \mapsto x/n$, $n \in \mathbb{N}$ jatkuvuuksien ja derivoituvuuksien nojalla funktio f_n on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Erityisesti funktio f_n on siis jatkuva välillä $[0,t]$ ja derivoituva välillä $]0,t[$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja jokaisella $t \in]0,1]$. Siten väliarvolauseen nojalla jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja jokaisella $t \in]0,1]$ on olemassa sellainen $\xi_t \in]0,t[$, että

$$f_n(t) - f_n(0) = f_n'(\xi_t)(t-0). \tag{2}$$

Koska $f_n(t) \in [1,e]$ ja $f_n'(t) = (1/n)f_n(t)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $t \in [0,1]$, niin yhtälön (2) nojalla pätee

$$|f_n(t) - f_n(0)| = t|f_n'(\xi_t)| = \frac{t}{n}|f_n(\xi_t)| \leq \frac{e}{n} \tag{3}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $t \in]0,1]$.

Olkoon sitten $\varepsilon > 0$ ja $n_\varepsilon = 1 + \lceil e/\varepsilon \rceil$[1]. Tällöin kaikilla $n \geq n_\varepsilon$ on voimassa

$$|f_n - 1|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_n(0)| \overset{(3)}{\leq} \max_{t\in[0,1]} \frac{e}{n} = \frac{e}{n} < \varepsilon.$$

Siten suppenemisen määritelmän nojalla on voimassa $f_n \to 1$.

[1]Funktio $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ on niin sanottu kattofunktio. Sen palauttaa reaaliluvun x arvoksi pienimmän kokonaisluvun, joka on suurempi kuin luku x. Esimerkiksi $\lceil\pi\rceil = 4$ ja $\lceil -1/2 \rceil = 0$. Vastaavalla logiikalla määritellään niin sanottu lattiafunktio $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

Tapa 2.
Kurssin Analyysi I nojalla tiedämme, että funktio f_n on derivoituva välillä $[0,1]$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten se saavuttaa suurimman arvonsa jommassakummassa välin $[0,1]$ päätepisteessä tai pisteessä t missä $f_n'(t) = 0$. Koska aina $f_n'(t) = \frac{1}{n}e^{t/n} > 0$, sekä $f_n(0) = 1$ ja $f_n(1) = e^{1/n} > 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin

$$d(f_n, 1) = \max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - 1| = f_n(1) - 1 = e^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Koska funktio $x \mapsto e^x$ on jatkuva, niin Lauseen 11.8 nojalla on voimassa

$$d(f_n, 1) = e^{\frac{1}{n}} - 1 \to e^0 - 1 = 0,$$

joten Lauseen 11.3 nojalla $f_n \to 1$. $\square$

4. (11:7) Olkoon $x_n = (\cos(n\pi/2), \sin(n\pi/2)) \in \mathbb{R}^2$ kun $n \in \mathbf{N}$. Määritä jonon (x_n) kasautumisarvot. Hae kullekin kasautumisarvolle jokin sitä kohti suppeneva osajono (x_{n_k}).

Ratkaisu. Muistetaan, että sini- ja kosinifunktiot ovat 2π-*periodisia*: on voimassa

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + n \cdot 2\pi) \quad \text{ja} \quad \cos(\alpha) = \cos(\alpha + n \cdot 2\pi)$$

kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Siten huomataan, että kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} x_m &= \left(\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{m\pi}{2} + n \cdot 2\pi\right), \sin\left(\frac{m\pi}{2} + n \cdot 2\pi\right)\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{(m+4n)\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{(m+4n)\pi}{2}\right)\right) \\ &= x_{m+4n}. \end{aligned}$$

Erityisesti siis

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1+4n} = (0,1), \\ x_2 &= x_{2+4n} = (-1,0), \\ x_3 &= x_{3+4n} = (0,-1) \quad \text{ja} \\ x_4 &= x_{4+4n} = (1,0) \end{aligned}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten jono (x_n) saa vuorotellen vain neljää eri arvoa. Koska $x_{i+4n} \in B(x_i, \varepsilon)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ja $\varepsilon > 0$, niin parit $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ ja $(1, 0)$ ovat jonon (x_n) kasautumisarvoja. Muita kasautumisarvoja jonolla (x_n) ei ole: jos $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1), (-1, 0), (0, -1), (1, 0)\}$, niin tällöin $x_n \notin B(y, \varepsilon_y/2)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ kun valitaan $\varepsilon_y = \min_{i \in \{1,2,3,4\}} d(x_i, y)$.

Siten jonolla (x_n) on tasan neljä kasautumisarvoa: $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ ja $(1, 0)$. Niitä kohti suppenevat osajonot ovat $(x_{n_{(0,1)}}) = (x_{1+4n})$, $(x_{n_{(-1,0)}}) = (x_{2+4n})$, $(x_{n_{(0,-1)}}) = (x_{3+4n})$ ja $(x_{n_{(1,0)}}) = (x_{4+4n})$. $\square$

5. (oleellisesti 11:3) Pidetän tunnettuna, että on olemassa bijektio $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, missä $\mathbb{Q}$ on rationaalilukujen joukko, eli $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ kun merkitään $q_n = q(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Jos $x \in \mathbb{R}$ on mielivaltainen reaaliluku etsi sellainen jonon (q_n) osajono (q_{n_k}), että $q_{n_k} \to x$ kun $k \to \infty$ $\mathbb{R}$:n tavallisessa metriikassa. Päättele: jokainen reaaliluku $x \in \mathbf{R}$ on jonon (q_n) kasautumisarvo.
Idea. Perustele miten voidaan valita peräkkäin sellaisia indeksejä $n_1 < n_2 < \ldots$, että $|x - q_{n_k}| < \frac{1}{k}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Ratkaisu. Ennen varsinaista osajonon valitsemista muistetaan aluksi, että kahden eri reaaliluvun välistä löytyy aina rationaaliluku. Siten jokaisella $r \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$ pätee $B(r, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Osoitetaan, että tästä seuraa, että jokaisesta kuulasta löytyy äärettömän monta rationaalilukua. Tehdään vastaoletus: on olemassa sellainen $r \in \mathbb{R}$ ja sellainen $\varepsilon > 0$, että kuulassa $B(r, \varepsilon)$ on vain äärellisen monta luvusta r eroavaa rationaalilukua $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Tällöin voidaan valita se luku $s \in \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$, jolle on voimassa $d(r, s) = \min\{d(r, s_i) : i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$. Tästä kuitenkin seuraa, että lukujen r ja s välistä ei löydy yhtäkään rationaalilukua, mikä on ristiriita. Siten kaikissa avaruuden $\mathbb{R}$ avoimissa kuulissa on äärettömästi rationaalilukuja.

Olkoon sitten $x \in \mathbb{R}$ mielivaltainen reaaliluku. Osoitetaan, että tällöin on olemassa sellainen jonon (q_n) osajono (q_{n_k}), että $q_{n_k} \to x$. Valitaan indeksit n_k seuraavasti:

Olkoon $n_1 \in \mathbb{N}$ sellainen luku, että $|x - q_{n_1}| < 1$.

Olkoon $n_2 \in \mathbb{N}$ sellainen luku, että $n_2 > n_1$ ja $|x - q_{n_2}| < \dfrac{1}{2}$.

$\vdots$

Olkoon $n_m \in \mathbb{N}$ sellainen luku, että $n_m > n_{m-1}$ ja $|x - q_{n_m}| < \dfrac{1}{m}$.

Tällaiset indeksit voidaan valita, sillä aiemman havainnon nojalla jokaisella

$k \in \mathbb{N}$ kuulassa $B(x, 1/k)$ on äärettömän monta rationaalilukua. Näin valittu osajono (q_{n_k}) suppenee kohti lukua x määritelmän nojalla.

Koska edellä osajono $q_{n_k} \to x$ kun $k \to \infty$, niin jokainen $x \in \mathbb{R}$ on jonon (q_n) kasautumisarvo (Lause 11.18).

6. (11:9) Olkoon X metrinen avaruus ja (x_n) pistejono avaruudessa X. Olkoon

$$A = \{a \in X : a \text{ on jonon } (x_n) \text{ kasautumisarvo}\}.$$

Näytä, että A on suljettu joukko avaruudessa X. *Vihje:* näytä esimerkiksi, että sulkeuma $\overline{A} \subset A$. Lauseista 11.6 ja 11.18 on silloin hyötyä.

Ratkaisu. Näytetään vihjeen mukaisesti, että $\overline{A} \subset A$. Tästä seuraa Lauseen 6.8 nojalla, että $A = \overline{A}$, jolloin A on suljettu.

Olkoon $x \in \overline{A}$. Tällöin Lauseen 11.6 nojalla on olemassa sellainen joukon A jono (a_n), että $a_n \to x$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $a_n \to x$, niin $a_k \in B(x, \varepsilon)$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Koska joukko $B(x, \varepsilon)$ on avoin, on olemassa sellainen $\varepsilon_{a_k} > 0$, että $B(a_k, \varepsilon_{a_k}) \subset B(x, \varepsilon)$. Koska piste a_k on jonon (x_n) kasautumisarvo, niin jokaisesta pisteen a_k ympäristöstä löytyy ääretön määrä jonon (x_n) pisteitä. Erityisesti siis $x_m \in B(a_k, \varepsilon_{a_k})$ äärettömän monella indeksillä $m \in \mathbb{N}$. Siten $x_m \in B(x, \varepsilon)$ äärettömän monella indeksillä $m \in \mathbb{N}$, joten piste x on jonon (x_n) kasautumisarvo ja $x \in A$. Pisteen x mielivaltaisuuden nojalla $\overline{A} \subset A$, joten Lauseen 6.8 nojalla joukko A on suljettu. $\square$

Vaihtoehto: Jos $x \in \overline{A}$, niin Lauseen 11.6 nojalla on olemassa sellainen joukon A jono (a_n), että $a_n \to x$. Olkoon $k \in \mathbb{N}$ mielivaltainen. Koska $a_k \in A$, niin $x_n \in B(a_k, \frac{1}{k})$ äärettömän monella indeksillä n. Siten voidaaan valita sellaisia kasvavia indeksejä $n_1 < n_2 < \ldots$, että $x_{n_k} \in B(a_k, \frac{1}{k})$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$ (vrt. teht. 5). Tällöin

$$d(x_{n_k}, a) \leq d(x_{n_k}, a_k) + d(a_k, a) \leq \frac{1}{k} + d(a_k, a) \to 0$$

kun $k \to \infty$. Siis $a \in A$ Lauseen 11.18 nojalla.