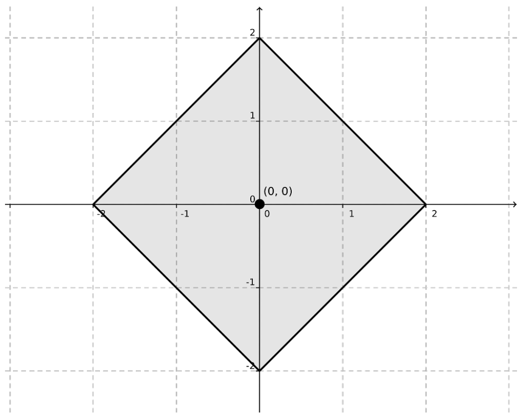
Topologia I
Harjoitus 2
Viikko 5 (28.1.-1.2. 2013)
Ratkaisuehdotuksia (OT), 7 sivua

1. Olkoon $|x|_1 = |x_1| + |x_2|$, kun $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Piirrä normia $|\cdot|_1$ vastaavan metriikan suljettu kuula $\overline{B}(\bar{0}, 2)$, missä $\bar{0} = (0, 0)$.

Ratkaisu. Huomataan heti, että suljetun kuulan määritelmän nojalla on voimassa $x = (x_1, x_2) \in \overline{B}(\bar{0}, 2)$ jos ja vain jos $|x|_1 = |x_1| + |x_2| \leq 2$. Jos $x_1 \geq 0$ ja $x_2 \geq 0$, niin tällöin $|x|_1 \leq 2$ jos ja vain jos $x_1 + x_2 \leq 2$. Siten tason oikeasta yläneljänneksestä kuulaan $\overline{B}(\bar{0}, 2)$ kuuluu pisteiden $(0, 1)$ ja $(1, 0)$ yhdistävän janan ja koordinaattiakselien rajaama alue. Jos taas $x_1 \geq 0$ ja $x_2 \leq 0$, niin tällöin $|x|_1 \leq 2$ jos ja vain jos $x_1 - x_2 \leq 2$, joten tason oikeasta alaneljänneksestä kuulaan $\overline{B}(\bar{0}, 2)$ kuuluu pisteiden $(0, -1)$ ja $(1, 0)$ yhdistävän janan ja koordinaattiakselien rajaama alue.

Vastaavasti kuulaan $\overline{B}(\bar{0}, 2)$ kuuluu tason vasemmasta alaneljänneksestä pisteiden $(0, -1)$ ja $(-1, 0)$ yhdistävän janan ja koordinaattiakselien rajaama alue ja vasemmasta yläneljänneksestä pisteiden $(0, -1)$ ja $(1, 0)$ yhdistävän janan ja koordinaattiakselien rajaama alue. Siten kuula $\overline{B}(\bar{0}, 2)$ koostuu pisteiden $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$ ja $(-1, 0)$ määrittämän neliön sisällä ja reunoilla olevista pisteistä.



Tehtävä 1. Suljettu kuula $\overline{B}(\bar{0}, 2)$ normia $|\cdot|_1$ vastaavassa metriikassa. $\square$

2. (2.4) Tutki ovatko d ja e metriikkoja reaalisuoralla $\mathbb{R}$, kun
(i) $d(s, t) = |s - t|^2$, $(s, t \in \mathbb{R})$,
(ii) $e(s, t) = \sqrt{|s - t|}$, $(s, t \in \mathbb{R})$.

Neuvo. Tapauksessa (ii) verifioi ensin että $\sqrt{s+t} \leq \sqrt{s} + \sqrt{t}$ kun $s, t \geq 0$.

Ratkaisu.

(i) Kaava $d(s,t) = |s-t|^2$ ei määrittele metriikkaa reaalisuoralla $\mathbb{R}$, sillä

$$d(1,-1) = 4 > 2 = d(1,0) + d(0,-1),$$

joten ehto (M1) (kolmioepäyhtälö) ei toteudu.

(ii) Kaava määrittelee metriikan reaalisuoralla. Osoitetaan aluksi (neuvon mukaisesti) aputulos: jos $s, t \geq 0$, niin

$$\sqrt{s+t} \leq \sqrt{s} + \sqrt{t}. \tag{1}$$

Olkoon siis $s, t \geq 0$. Tällöin

$$s + t \leq s + 2\sqrt{st} + t = (\sqrt{s} + \sqrt{t})^2,$$

joten aputulos (1) seuraa ottamalla neliöjuuri puolittain. Koska $e(s,t) \geq 0$ kaikilla $s, t \in \mathbb{R}$, voidaan nyt osoittaa metriikan ehdot yksi kerrallaan.

(M1) Olkoon $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned} e(x,y) &= \sqrt{|x-y|} \\ &= \sqrt{|x-z+z-y|} \\ &\overset{(*)}{\leq} \sqrt{|x-z|+|z-y|} \\ &\overset{(1)}{\leq} \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} \\ &= e(x,z) + e(z,y). \end{aligned}$$

Edellä käytettiin tavallista reaalilukujen kolmioepäyhtälöä kohdassa (*).

(M2) Olkoon $x, y \in R$. Tällöin

$$e(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|} = e(y,x).$$

(M3) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned} e(x,y) = \sqrt{|x-y|} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad |x-y| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x - y = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

Siten ehdot (M1), (M2) ja (M3) täyttyvät, joten kaava $e(s,t) = \sqrt{|s-t|}$ määrittelee metriikan $e : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. $\square$

3. (2.11 osa) Olkoon $S(\overline{0}, 1)$ pallo tason $\mathbb{R}^2$ euklidisessa metriikassa. Määritä läpimitta $d(S(\overline{0}, 1))$, kun

(i) d on euklidinen metriikka,

(ii) d on tehtävässä 2:1 esiintyvän normin $|\cdot|_1$ antama metriikka.

Muistutus. Tapauksessa (ii) kannattaa muistaa Schwarzin epäyhtälöä tasossa $\mathbb{R}^2$ (Väisälä, kohta 1.4).

Ratkaisu. Joukon läpimitta määriteltiin kirjan sivulla 24 kohdalla 2.11: joukon A läpimitta on $d(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$. Usein joukon läpimitta on kätevä osoittaa näyttämällä, että samanaikaisesti on voimassa $d(x,y) \leq a$ kaikilla $x, y \in A$ (jolloin siis $d(A) \leq a$) ja $d(c,d) = a$ joillakin $c, d \in A$ (jolloin siis $d(A) \geq a$). Tällöin siis pätee $d(A) = a$.

(i) Muistetaan, että kaikilla $z \in S(\bar{0}, 1)$ on voimassa $|z| = 1$. Siten kaikilla $x, y \in S(\bar{0}, 1)$ pätee

$$d(x,y) = |x-y| \leq |x| + |y| = 1 + 1 = 2,$$

joten $d(S(\bar{0}, 1)) \leq 2$. Toisaalta $(1,0), (-1,0) \in S(\bar{0}, 1)$ ja

$$d((1,0),(-1,0)) = |(2,0)| = \sqrt{2^2} = 2,$$

joten $d(S(\bar{0}, 1)) \geq 2$. Siis $d(S(\bar{0}, 1)) = 2$.

(ii) Muistutuksen mukaisesti käytetään hyväksi Schwarzin epäyhtälöä (kirjan kohta 1.4 sivulla 17): huomataan, että jokaisella $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on voimassa

$$\begin{aligned} |x|_1 &= |x_1| + |x_2| \\ &= (|x_1|, |x_2|) \cdot (1,1) \\ &\leq |(|x_1|, |x_2|) \cdot (1,1)| \\ &\overset{\text{Schwarzin ey}}{\leq} |(|x_1|, |x_2|)||(1,1)| \\ &= \sqrt{2}|x|. \end{aligned}$$

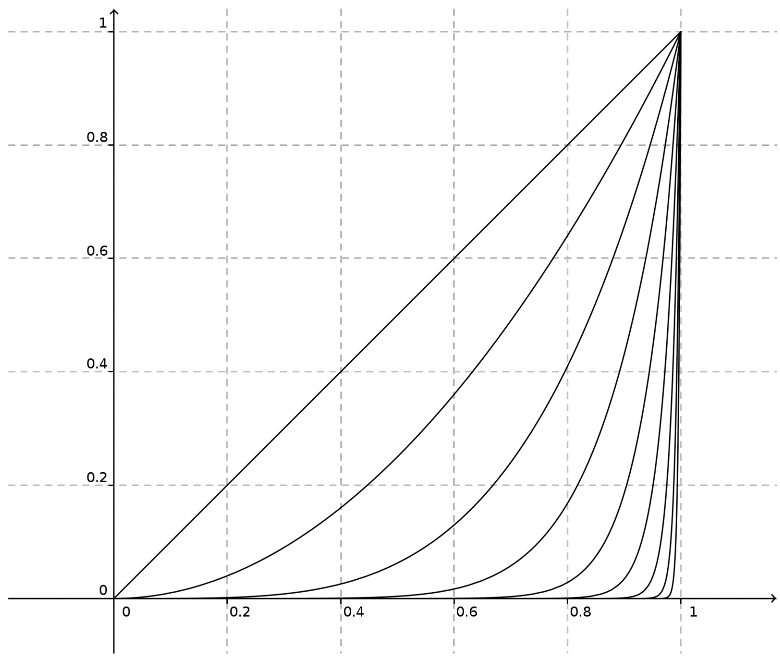
Siten jos $x, y \in S(\bar{0}, 1)$, niin $d(x,y) = |x-y|_1 \leq \sqrt{2}|x-y| \leq \sqrt{2}(|x| + |y|) = 2\sqrt{2}$, joten $d(S(\bar{0}, 1)) \leq 2\sqrt{2}$. Toisaalta $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \in S(\bar{0}, 1)$ ja

$$d\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left|\frac{2}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{2}{\sqrt{2}}\right|, = 2\sqrt{2}$$

joten $d\left(S(\bar{0},1)\right) = 2\sqrt{2}$. $\square$

4. (2.12) Olkoon $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ jatkuva välillä } [0,1]\}$ varustettuna max-normilla $|f-g|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|$. Olkoon lisäksi $p_n(t) = t^n$, kun $t \in [0,1]$ ja $n \in \mathbb{N}$, sekä $A = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Määritä läpimitta $d(A)$ avaruudessa $C[0,1]$.

Ratkaisu. Piirtämällä kuvan voi saada jonkinlaista vihjettä siitä, mikä joukon läpimitta voisi olla. Osoitetaan, että $d(A) = 1$ osoittamalla, että $d(A) \leq 1$ ja $d(A) \geq 1$.



Tehtävä 4. Funktioiden p_n kuvaajia arvoilla $n = 1,2,4,8,16,32,64,128,256$.

Osoitetaan ensin, että $d(A) \leq 1$ näyttämällä, että $d(p_n,p_m) \leq 1$ kaikilla $p_n, p_m \in A$. Olkoon $t \in [0,1]$. Huomataan aluksi, että kurssilla Analyysi I opittujen tietojen nojalla $0 \leq t^n \leq 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Erityisesti jos $n \leq m$, niin $0 \leq t^m \leq t^n \leq 1$, joten on voimassa $0 \leq t^n - t^m \leq 1$ kaikilla $m,n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$. Siten $0 \leq |t^n - t^m| \leq 1$ kaikilla $t \in [0,1]$ ja $m,n \in \mathbb{N}$, joten

$$d(p_n,p_m) = |p_n - p_m|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |p_n(t) - p_m(t)| = \max_{t\in[0,1]} |t^n - t^m| \leq 1.$$

Erityisesti $d(A) \leq 1$.

Osoitetaan sitten, että $d(A) \geq 1$ näyttämällä, että jokaisella $\varepsilon \in]0, 1/4]$ on olemassa sellaiset funktiot $p_n, p_m \in A$, että $d(p_n, p_m) > 1 - \epsilon$. Olkoon siis $\varepsilon \in]0, 1/4]$ ja $t_0 \in]0, 1[$ sellainen luku, että $t_0 > 1 - \varepsilon/2$. Koska $t_0 \in]0, 1[$, kurssin Analyysi I nojalla tiedämme, että $t_0^n \to 0$, kun $n \to \infty$. Erityisesti on olemassa sellainen $m \in \mathbb{N}$, että $t_0^n < \varepsilon/2$ kun $n \geq m$. Koska $m \geq 1$, niin $t - t^m \geq 0$ kaikilla $t \in [0, 1]$, joten erityisesti

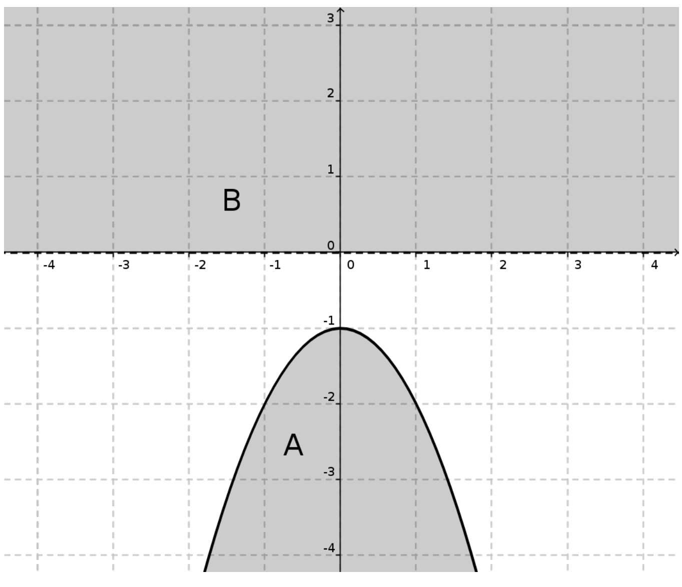
$$d(p_1, p_m) = \max_{t \in [0,1]} |t - t^m| \geq t_0 - t_0^m > 1 - \frac{\varepsilon}{2} - t_0^m > 1 - \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \varepsilon.$$

Siten $d(A) > 1 - \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon \in]0, 1/4]$, joten joukon läpimitan supremum-määritelmän nojalla $d(A) \geq 1$.

Koska $d(A) \leq 1$ ja $d(A) \geq 1$, niin $d(A) = 1$. $\square$

5. Määritä tason joukkojen $A = \{(x, y) : x^2 + 1 + y \leq 0\}$ ja $B = \{(x, y) : y > 0\}$ välinen etäisyys $d(A, B)$ (i) euklidisessa metriikassa, (ii) diskreetissä $\{0, 1\}$-metriikassa.

Ratkaisu. Tilanteen hahmottaminen helpottuu piirtämällä joukoista A ja B kuva. Muista kuitenkin, että kuva ei kelpaa todistukseksi!



Tehtävä 5. Joukot A ja B.

(i) Osoitetaan, että $d(A, B) \leq 1$ ja $d(A, B) \geq 1$, mistä voimme päätellä, että $d(A, B) = 1$. Huomataan, että $(0, -1) \in A$ ja $(0, \varepsilon) \in B$ jokaisella

$\varepsilon > 0$. Näiden pisteiden välinen euklidinen etäisyys on

$$d((0,-1),(0,\varepsilon)) = \sqrt{0^2 + (-1-\varepsilon)^2} = 1 + \varepsilon.$$

Siten tiedetään, että $d(A,B) \leq 1 + \varepsilon$ jokaisella $\varepsilon > 0$, joten joukkojen välisen etäisyyden infimum-määritelmän nojalla $d(A,B) \leq 1$.

Toisaalta jos $(x_1, y_1) \in A$ and $(x_2, y_2) \in B$, niin $y_2 > 0$ ja

$$y_1 \leq -x_1^2 - 1 \leq -1. \tag{2}$$

Huomataan, että

$$\inf_{y_1 \leq -1, y_2 > 0} |y_1 - y_2| = 1, \tag{3}$$

joten edelleen

$$\begin{aligned} d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \\ &\geq \sqrt{(y_1-y_2)^2} \\ &= |y_1 - y_2| \\ &\overset{(3)}{\geq} 1. \end{aligned}$$

Erityisesti siis $d(A,B) \geq 1$, joten aiemman havainnon nojalla $d(A.B) = 1$.

(ii) Huomion (2) nojalla kaikille joukon A pisteille (x,y) on voimassa $y < 0$, joten yksikään joukon A piste ei voi kuulua joukkoon B. Siten $d_{\{0,1\}}(a,b) = 1$ kaikilla pisteillä $a \in A$ ja kaikilla pisteillä $b \in B$. Joukkojen etäisyyden määritelmän nojalla nyt siis on voimassa

$$d_{\{0,1\}}(A,B) = \inf_{a \in A, b \in B} d_{\{0,1\}}(a,b) = \inf_{a \in A, b \in B} 1 = 1,$$

joten $d_{\{0,1\}}(A,B) = 1$. $\square$

6. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $A \subset X$, $B \subset X$ sellaisia joukkoja, että $A \cap B \neq \emptyset$. Näytä, että yhdisteen $A \cup B$ läpimitalle $d(A \cup B)$ on voimassa

$$d(A \cup B) \leq d(A) + d(B).$$

Ratkaisu. Olkoon $x, y \in A \cup B$ ja $c \in A \cap B$. Muistaen joukon läpimitan määritelmä käydään läpi kolme mahdollista tapausta.

1) Jos $x, y \in A$, niin $d(x, y) \leq d(A) \leq d(A) + d(B)$.

2) Jos $x, y \in B$, niin $d(x, y) \leq d(B) \leq d(A) + d(B)$.

3) Jos $x \in A$ ja $y \in B$, niin $d(x, y) \leq d(x, c) + d(c, y) \leq d(A) + d(B)$.

Siten kaikilla $x, y \in A \cup B$ on voimassa $d(x, y) \leq d(A) + d(B)$, joten $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$. $\square$