2013 / Topologia I / Harjoitus 1 (21.1. – 25.1.13) Ratkaissut Okko Kanerva

① $x \cdot y = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0 + 0 + (-2) = -2$

$|x|_2 = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ $\qquad |x+y|_2 = |(1,1,1)|_2 = \sqrt{3}$

$|y|_2 = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ $\qquad |x-y|_2 = |(1,-1,-3)|_2 = \sqrt{11}$

$|x|_2 \cdot |y|_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$

Huom. Koska $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ on sisätuloavaruus (esimerkki 1.3.1), tehtävässä 6.i todistettavan Suunnikasyhtälön tulee päteä yo. tuloksille (jos ne oikein). Niinpä on:

$$(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{11})^2 = 14 = 2 \cdot 7 = 2[(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2].$$

Myös Schwarzin ey:n tulee päteä:

$$|x \cdot y| = |-2| = 2 \le \sqrt{10} = |x|_2 \cdot |y|_2 \text{ , OK.}$$

Selvemmällä normimerkinnällä:

$$|x \cdot y| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \text{ .}$$

② (1:3) Tässä $x \cdot x = x_1 x_2 + x_2 x_1 = 2x_1x_2 = -2 \ngeq 0$ esim. kun $x = (1,-1) \in \mathbb{R}^2$.

$\therefore$ (S4) ei ole voimassa kaikille $x \in \mathbb{R}^2$.

$\therefore$ Tehtävässä annettu $\cdot$ ei ole sisätulo $\mathbb{R}^2$:ssa. $\square$

③ (1:4)

Oletus: $(E, \cdot)$ on sisätuloav. (ts. 1.2:n määritelmän kaikki ehdot voimassa) ja $A \subset E$.

Väite: $A^\perp$ on E:n vrialiav. (ks. kohta 1.1, puoliväli).

Tod. (0) Vaatimus $A^\perp \subset E$ on tosi heti $A^\perp$:n määritelmän nojalla. $\boxtimes$

(1) Os. että $x, y \in A^\perp \Rightarrow x + y \in A^\perp$ ts. että jos $x, y \in A^\perp$, niin myös $x + y \in A^\perp$:
Oletetaan, että $x, y \in A^\perp$. Siis ($A^\perp$:n määr. nojalla)$^{x,y \in E \text{ ja}}$ $x \cdot z = 0 = y \cdot z$ kaikille $z \in A$. Mutta silloin$^{x+y \in E \text{ ja}}$ kaikille $z \in A$ on

$$(x+y) \cdot z \overset{(S3)}{=} x \cdot z + y \cdot z = 0 + 0 = 0.$$

$\therefore$ $x + y \in A^\perp$ (joukon $A^\perp$ määr. nojalla). $\boxtimes$

(2) Ol. $x \in A^\perp$ ja $a \in \mathbb{R}$. Nyt$^{x \in E \text{ ja}}$ kaikille $z \in A$ on

$$(ax) \cdot z \overset{(S2)}{=} a(x \cdot z) \overset{x \in A^\perp}{=} a0 = 0 \qquad (a, 0 \in \mathbb{R}) \text{ ja } ax \in E$$

joten $ax \in A^\perp$ (joukon $A^\perp$ määr. nojalla). $\boxtimes$

(3) $\bar{0} \in A^\perp$, koska $\bar{0} \cdot z = 0$ kaikille $z \in A$.
Vm. johtuu siitä, että $A \subset E$ ja $\bar{0} \cdot z = 0$ kaikille $z \in E$:

$$\bar{0} \cdot z \underset{1.1\text{:ssä}}{\overset{\bar{0}\text{:n määr.}}{=}} (\bar{0} + \bar{0}) \cdot z \overset{(S3)}{=} \bar{0} \cdot z + \bar{0} \cdot z,$$

mistä $\bar{0} \cdot z = 0$ reaalilukujen omin. nojalla (kaikille $z \in E$). $\boxtimes$

$\therefore$ $A^\perp$ on E:n vrialiav. kohdassa 1.1 olevan määr. nojalla. $\square$

Huom. Avaruudesta E ja sen sisätulosta $\cdot$ tiedämme vain määritelmässä (1.2) mainitut ominaisuudet (ja käytimme niistä vain osaa).

(4) Tiedetään, että $C[0,1]$ on vrlavaruus (kohdan 1.1 loppu).
Käsitteen 'sisätulo' määritelmä on annettu kohdassa 1.2;
käymme läpi <u>määritelmän</u> (koska sopivia lauseita ei liene käytettävissä):

(S0) On tarkistettava, että $f \cdot g \in \mathbb{R}$ kaikille $f, g \in C[0,1]$.
Asia seuraa heti integraalin määritelmästä. $\boxtimes$

(S1) Että $f \cdot g = g \cdot f$ kaikille $f, g \in C[0,1]$, seuraa heti reaalilukujen tulon vaihdannaisuudesta (aina $f(x)g(x) = g(x)f(x)$). $\boxtimes$

(S2) Ol. $a \in \mathbb{R}$ ja $f, g \in C[0,1]$. Nyt

$$(af)\cdot g = \int_0^1 (af)(x)g(x)\,dx = \int_0^1 af(x)g(x)\,dx = a\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = a\,(f\cdot g). \quad \boxtimes$$

(S3) Ol. $f, g, h \in C[0,1]$. Nyt

$$(f+g)\cdot h = \int_0^1 (f+g)(x)h(x)\,dx = \int_0^1 \underbrace{(f(x)+g(x))\,h(x)}_{f(x)h(x)+g(x)h(x)}\,dx \overset{\text{integraalin lineaarisuus}}{=} \int_0^1 f(x)h(x)\,dx + \int_0^1 g(x)h(x)\,dx$$

$$= f\cdot h + g\cdot h. \quad \boxtimes$$

(S4) Ol. $f \in C[0,1]$. Nyt

$$f\cdot f = \int_0^1 f(x)f(x)\,dx = \int_0^1 (f(x))^2\,dx \geq 0 \quad (\text{Ana II}),$$ sillä $(f(x))^2 \geq 0$ kaikille $x \in [0,1]$. $\boxtimes$

(S5) Avaruuden $C[0,1]$ origo $\overline{0}$ on vakioftio $x \mapsto 0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ (joka jva).
Ol. $f \in C[0,1]$.

"$\Leftarrow$": Jos $f = \overline{0}$, on $f\cdot f = \int_0^1 \overline{0}(x)\,\overline{0}(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$.

"$\Rightarrow$": Ol. kääntäen, että $f\cdot f = \overline{0}$ ts. että

$$(*) \qquad \int_0^1 (f(x))^2\,dx = 0.$$

Koska ftio $x \mapsto (f(x))^2$ on <u>jva</u> (oletus $f \in C[0,1]$ ja Ana II) sekä <u>epänegatiivinen</u>, seuraa Ana II:n nojalla $(*)$:stä, että $f^2 = \overline{0}$ ja siis $f = \overline{0}$.

Siis $f\cdot f = 0 \Leftrightarrow f = \overline{0}$. $\boxtimes$ $\square$

(5) Merk. po. "ykkösnormia" selvyyden vuoksi $\|\ \|_1$. Ol. $n \in \mathbb{N}$. Tiedet. $\mathbb{R}^n$ vrlav. (kohta 1.1).
Käsitteen 'normi' määritelmä on annettu kohdassa 1.6; käymme läpi sen (mutta tiiviimmin kuin vast. tehtävässä 4 yllä):
Ol. että $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}$.

(N0) On tarkistettava, että $\|x\|_1 \in \mathbb{R}_+$. Tämä on kuitenkin selvää.

(N1) $$\|x+y\|_1 \overset{\text{määr.}}{=} |x_1+y_1| + \cdots + |x_n+y_n| \overset{\mathbb{R}\text{:n }\Delta\text{-ey}}{\leq} |x_1| + |y_1| + \cdots + |x_n| + |y_n|$$
$$\underset{(\text{liitänt.})}{\overset{\text{vaihd.}}{=}} |x_1| + \cdots + |x_n| + |y_1| + \cdots + |y_n| \overset{\text{määr.}}{=} \|x\|_1 + \|y\|_1$$

(N2) $$\|ax\|_1 \overset{\text{määr.}}{=} |ax_1| + \cdots + |ax_n| = |a|\cdot|x_1| + \cdots + |a|\cdot|x_n| \overset{\text{ositt.}}{=} |a|\,(|x_1| + \cdots + |x_n|)$$
$$\overset{\text{määr.}}{=} |a|\cdot\|x\|_1$$

(N3) $$\|x\|_1 = 0 \implies |x_1| + \cdots + |x_n| = 0 \underset{\text{summattavat}}{\overset{\text{epäneg.}}{\implies}} |x_1| = 0, \ldots, |x_n| = 0 \implies x = \overline{0}.$$

$\square$

⑥ (i) Oletus: $(E, \cdot)$ on sisätuloav. (ts. 1.2:n määr. ehdot ovat voimassa).
Väite: Suunnikasyhtälö pätee $(E, \cdot)$:ssä.

Tod. Merk. sisätulon $\cdot$ antamaa normia $\| \ \|$.
Ol. $x, y \in E$. Nyt esim. $\|x\|^2 = (\sqrt{x \cdot x})^2 = x \cdot x$ ja

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) + (x-y)\cdot(x-y) \overset{(S3)}{=\!=}$$

$$x\cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y + x \cdot x + x\cdot(-y) + (-y)\cdot x + (-y)\cdot(-y) \overset{(S1)}{\underset{(S2)}{=\!=}}$$

$$x \cdot x + 2(x\cdot y) + y \cdot y + x \cdot x - 2(x \cdot y) + y \cdot y = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

□

Huom. 1: Kaava kuten $x\cdot(y-z) = x\cdot y - x \cdot z$ saataisiin myös (S3):sta ilman ehdon (S2) käyttöä.

Huom. 2: Suunnikasyhtälön nimi: mieti suunnikasta, sen lävistäjiä ja sivuja.

(ii) Oletus: $n \geq 2$.
Väite: Avaruuden $\mathbb{R}^n$ normi $\| \ \|_\infty$ ei ole peräisin mistään $\mathbb{R}^n$:n sisätulosta $\cdot$.

Tod. Kaikille sisätulosta peräisin oleville normeille pätee i-kohdan Suunnikasyhtälö. Se ei kuitenkaan päde $\| \ \|_\infty$:lle (emme tarvitse tietää sitä normiksi):

Val. $x = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ ja $y = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Nyt

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |x_j| = \max\{1, 0, \dots, 0\} = \max\{1, 0\} = 1,$$

samoin $\|y\|_\infty = 1$, ja koska $n \geq 2$, on

$$(x+y)_j = \begin{cases} 1 & \text{kun } j=1 \text{ tai } j=n \\ 0 & \text{muuten (jos muita tapauksia on)} \end{cases},$$

$$(x-y)_j = \begin{cases} 1 & \text{kun } j=1 \\ -1 & \text{kun } j=n \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

jolloin myös $\|x+y\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |(x+y)_j| = 1$ ja $\|x-y\| = \max_{j=1,\dots,n} |(x-y)_j| = 1$.
Näin ollen

$$\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2).$$

□

Huom. $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ ei tietenkään ole sisätuloav. (myöskään) kirjaimellisesti, koska $\| \ \|_\infty$ ei ole sisätulo $\mathbb{R}^n$:ssä (HT).