① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Merk. lähdön $\mathbb{R}$ (eukl.) metriikka d:llä ja maalin $\mathbb{R}^2$ (eukl.) metriikkaa d':lla. Koska f selvästi injektio (1. komponenttikuvaus!), yritämme toiveikkaasti (vrt. 9.18, puoliväli) todistaa, että f on bilipschitz.

Sitä varten näyttäisi hyödylliseltä löytää Lipschitz-vakio 2. komponenttikuvaukselle, sinille. Idea: Väliarvolause!

Ol. $x, y \in \mathbb{R}$ se. $x < y$. Nyt $\sin$ on derva väl. $]x, y[$ $(D \sin = \cos)$ ja jva (myös) pisteissä x ja y, joten Väliarvolauseen nojalla $\exists\, \xi_{xy} \in]x, y[$:

$$\sin x - \sin y = (\cos \xi_{xy})(x - y),$$

jolloin $|\sin x - \sin y| = |\cos \xi_{xy}| \cdot |x - y| \le 1 \cdot |x - y|$. Itse asiassa kaikille $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|.$$

Nyt kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ on

$$d'(f(x), f(y)) = d'((x, \sin x), (y, \sin y)) = \sqrt{(x-y)^2 + (\sin x - \sin y)^2} =$$
$$\sqrt{|x-y|^2 + |\sin x - \sin y|^2} \le \sqrt{2|x-y|^2} = \sqrt{2}\,|x-y| = \sqrt{2}\, d(x, y)$$

ja toisaalta

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x-y)^2} \le \sqrt{(x-y)^2 + (\sin x - \sin y)^2} = d'(f(x), f(y)).$$

Näin ollen seuraavan huomautuksen 1 (vrt. 10.3, loppu) nojalla f on $\sqrt{2}$-bilipschitz (missä $\sqrt{2} \ge 1$). Vastaus: KYLLÄ.

Hyödyllisiä huomioita:

1. Kun $f : X \to Y$, $M > 0$ ja $x, y \in X$, on epäyhtälöpari $\frac{d(x,y)}{M} \le d'(f(x), f(y)) \le M d(x,y)$ selvästi yhtäpitävä epäyhtälöparin
$$\begin{cases} d(x,y) \le M\, d'(f(x), f(y)) & \text{[ylempi]} \\ d'(f(x), f(y)) \le M\, d(x,y) & \text{[alempi]} \end{cases}$$
kanssa (huomaa symmetria!). Lisäksi: jos ylempi toteutuu vakiolla M_1 ja alempi toteutuu vakiolla M_2, toteutuvat molemmat vakiolla $M = \max\{M_1, M_2\}$, tietysti myös tätä suuremmilla.

2. Vastaavasti joukon X metriikkojen d ja e bilipschitz-ekvivalenssin ehto voidaan lausua symmetrisessä muodossa
"on olemassa $M > 0$ se. $\begin{cases} d(x,y) \le M e(x,y) \\ e(x,y) \le M d(x,y) \end{cases}$ kaikille $x, y \in X$".

(Itse asiassa kyseessä on ekv. relaatio: refleks., symm. ja transitiivinen.)

3. Huomataan, että jos edellä $\# X \ge 2$, on M välttämättä ≥ 1.

② (i) Topologia (avoimet joukot) on määritelty (metriselle avaruudelle) <u>kuulien</u> avulla; jos hyvin käy, riittää verrata d-kuulia ja e-kuuliin.

Ol. että $x, y \in \mathbb{R}$. Silloin $e(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{d(x,y)}$. Niinpä

$$\forall r > 0: \quad e(x,y) < r \Leftrightarrow \sqrt{d(x,y)} < r \Leftrightarrow d(x,y) < r^2,$$

$\boxed{d(x,y) \geq 0,\ r \geq 0}$

mikä merkitsee, että

$$\forall r > 0: \quad B_e(x,r) = B_d(x, r^2).$$

1° Ol. $U \subset \mathbb{R}$ on d-avoin. Os. että U on myös e-avoin.
Sitä varten ol. että $x \in U$. [Tässä ei tarvitse välittää siitä, onko U epätyhjä vai ei: olemme todistamassa väitettä muotoa $\forall x \in U \ldots$]
Siis $\exists r > 0$ se. $B_d(x,r) \subset U$.
Mutta nyt $\sqrt{r} > 0$ ja $B_e(x, \sqrt{r}) = B_d(x,r) \subset U$.
$\therefore$ U on e-avoin.

2° Ol. $U \subset \mathbb{R}$ on e-avoin. Os. että U on myös d-avoin.
Sitä varten ol. että $x \in U$. Siis $\exists r > 0$ se. $B_e(x,r) \subset U$.
Mutta nyt $r^2 > 0$ ja $B_d(x, r^2) = B_e(x,r) \subset U$.
$\therefore$ U on d-avoin.

Kohtien 1° ja 2° nojalla d ja e ovat topologisesti ekvivalentit (10.1).
<u>Vastaus:</u> KYLLÄ. [Tapa II: ks. sivu 5.]

(ii) Jos olisimme uskoneet, että tässäkin vastaus on myönteinen, olisimme käsitelleet tämän kysymyksen ensin (lause 10.4) ☺. Ed. sivun huomion 2 mukaan välttämätöntä sille, että d ja e olisivat bilipschitz-ekvivalentteja, on sellaisen vakion $M > 0$ olemassaolo, että kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ on
$$\begin{cases} d(x,y) \leq M\, e(x,y) \\ e(x,y) \leq M\, d(x,y) \end{cases},$$

jolloin erityisesti kaikille $x \neq 0$ on
$$M \geq \frac{d(x,0)}{e(x,0)} = \frac{|x|}{\sqrt{|x|}} = \sqrt{|x|} \quad \text{ja} \quad M \geq \frac{e(x,0)}{d(x,0)} = \frac{1}{\sqrt{|x|}}.$$

Mutta nämä ovat Analyysi I:n mukaan mahdottomia ($\sqrt{|x|} \xrightarrow[|x| \to \infty]{} \infty$ ja $\frac{1}{\sqrt{|x|}} \xrightarrow[x \to 0]{} \infty$).
Siispä d ja e eivät ole bilipschitz-ekvivalentteja (jo toinen mahdottomuus riittäisi)!
<u>Vastaus:</u> EI.

<u>Huomautus:</u> Tehtävissä 1 ja 2 bilipschitz-asiat selvisivät pitkälti siitä, että

tietyt derivaatat olivat tai eivät olleet rajoitettuja. Mutta Lipschitz-kysymykset eivät aina näin palaudu derivaattoihin. Muistetaan esim. ftio $x \mapsto d(x, A)$: $X \to \mathbb{R}$, missä X on mieliv. metrinen avaruus (ja $\emptyset \neq A \subset X$); emmehän edes voi puhua ftioiden $X \to \mathbb{R}$ derivaatoista näin yleisesti... (Muista sovellus 4.6.)

(3) Määr. $h: \Gamma \to \mathbb{R}$ asettamalla $h = pr_1 | \Gamma$ (rajoittuma), missä $pr_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (on 1. projektio, ks. 5.5). Koska $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, h on hyvin määritelty, lisäksi jva (5.6 ja 7.11). Sitä paitsi h on myös bijektio, käänteiskuvauksena

$$x \mapsto (x, f(x)) : \mathbb{R} \to \Gamma.$$

Nimittäin kun merk. yo. kuvausta q:llä, on $q \circ h = id_\Gamma$ ja $h \circ q = id_\mathbb{R}$:

Ol. $z \in \Gamma$. Nyt $\exists x \in \mathbb{R}$: $z = (x, f(x))$ ja $(q \circ h)(z) = q(h(z)) = q(h(x, f(x)))$
$= q(pr_1(x, f(x))) = q(x) = (x, f(x)) = z = id_\Gamma(z)$.

Ol. $x \in \mathbb{R}$. Nyt $(h \circ q)(x) = h(q(x)) = h(x, f(x)) = pr_1(x, f(x)) = x = id_\mathbb{R}(x)$.

Näin ollen lauseen 0.14 nojalla h on bijektio ja $h^{-1} = q$.

Os. vielä, että $h^{-1}: \mathbb{R} \to \Gamma$ on jva:
Kuvauksella $q': \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, jossa $q'(x) = (x, f(x))$, on komponenttikuvauksina (5.8) $id_\mathbb{R}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka jvia. Siis q' jva (5.9).
Näin myös $h^{-1} = q$ on jva kuvauksen q' korajoittumana (7.17, 7.16).

$\therefore$ h on homeo (9.2). $\therefore$ $\Gamma \approx \mathbb{R}$ (9.2). $\square$

(4) Tässä $f: X \to Y$ ja $f^{-1}: Y \to X$ jvia. Niinpä lause 6.13 sovellettuna joukkoihin $A \subset X$ ja $fA \subset Y$ antaa

$$f\overline{A} \subset \overline{fA} \quad \text{ja} \quad f^{-1}\overline{fA} \subset \overline{f^{-1}fA}. \qquad \text{("Lyhyt viiva sisältyy pitkään viivaan.")}$$

Edelleen $ff^{-1}\overline{fA} \subset f\,\overline{f^{-1}fA}$. Mutta $ff^{-1}\overline{fA} = (f \circ f^{-1})\overline{fA} = id_Y \overline{fA} = \overline{fA}$
ja vastaavasti $f\,\overline{f^{-1}fA} = f\overline{A}$.

Siis itse as. $\overline{fA} \subset f\overline{A}$.
Yhteensä $f\overline{A} = \overline{fA}$.

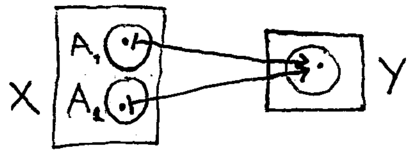
Toisessa osassa käytetään aputuloksia, jotka todistetaan jälkeen päin.

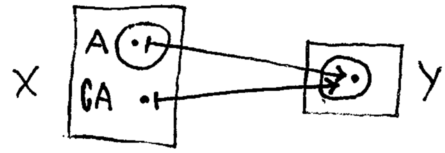
$$f\,\partial A \underset{8.3.5}{=} f[\overline{A} \cap \overline{\complement A}] \underset{(i)}{=} f\overline{A} \cap f\overline{\complement A} \underset{yo.}{=} \overline{fA} \cap \overline{f\complement A} \underset{(ii)}{=} \overline{fA} \cap \overline{\complement fA} \underset{8.3.5}{=} \partial fA$$

Aputuloksia: Ol. $f: X \to Y$ bijektio ja A, A_1 ja $A_2 \subset X$. Tällöin

(i) $f[A_1 \cap A_2] = fA_1 \cap fA_2$ sekä (ii) $f\complement A = \complement fA$.

<u>Huom.</u> Ilman bijektiivisyysoletusta nämä eivät päde:





(Vrt. myös 0.8.5.)

<u>Tod. aputuloksille:</u> Voitaisiin käyttää perusmenetelmää ts. osoittaa, että

$$y\in f[A_1\cap A_2] \Rightarrow y\in fA_1\cap fA_2 \quad \text{ja} \quad y\in fA_1\cap fA_2 \Rightarrow y\in f[A_1\cap A_2]$$

jne., mutta käytetäänkin kikkaa: Vastaavat yhtälöt <u>pätevät alkukuville</u> suoraan lauseen 0.8 mukaan (<u>ilman bijektiivisyyttä</u>).

Temppu perustuu siihen, että joukon $B\subset Y$ alkukuva $f^{\leftarrow}B$ on siinä tapauksessa, että $f: X\to Y$ sattuu olemaan bijektio, sama kuin B:n kuva käänteiskuvauksessa, $f^{-1}: Y\to X$, siis joukko $f^{-1}B$. Sovellamme tosin lähtien bijektiosta $f^{-1}: Y\to X$:

(i) $$f[A_1\cap A_2] = (f^{-1})^{-1}[A_1\cap A_2] = (f^{-1})^{\leftarrow}[A_1\cap A_2] \underset{0.8.2}{=\!=} (f^{-1})^{\leftarrow}A_1\cap (f^{-1})^{\leftarrow}A_2$$
$$= (f^{-1})^{-1}A_1 \cap (f^{-1})^{-1}A_2 = fA_1\cap fA_2$$

(ii) $$f\complement A = (f^{-1})^{-1}\complement A = (f^{-1})^{\leftarrow}\complement A \underset{0.8.3}{=\!=} \complement (f^{-1})^{\leftarrow}A = \complement (f^{-1})^{-1}A = \complement fA \quad \square$$

(5) Teemme päinvastaisessa järjestyksessä: käänteiskuvauksen lauseke (ja bijektiivisyys) saadaan (arvaamalla tai) ratkaisemalla yhtälö — osoittamalla, että

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ \forall (z,w)\in\mathbb{R}^2:\quad f(x,y) = (z,w) \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = w - q(z)\end{cases},$$

muttemme tee niin (osoita <u>ekvivalenssia</u> huolellisesti) vaan merkitsemme

$$h(z,w) = (z,\, w - q(z))$$

ja laskemme vain:

$$f(h(z,w)) = f(z, w-q(z)) = (z, (w-q(z)) + q(z)) = (z,w)$$

ja samoin $h(f(x,y)) = \cdots = (x,y)$. Jälleen lause 0.14 antaa: f bijektio ja $h = f^{-1}$. Kuvaukset f ja $f^{-1} = h$ ovat jvia lauseiden 5.9, 5.6, 4.12 ja 5.2 & 5.3 nojalla. $\square$

(6) <u>"⇒"</u>: Ol. $\mathcal{T}_d\subset\mathcal{T}_e$. Ol. $a\in X$, $r>0$. Nyt $a\in B_d(a,r)\in\mathcal{T}_d$ (3.2), joten ol. muk. $a\in B_d(a,r)\in\mathcal{T}_e$. Siis (3.1) on olemassa $s>0$ se. $B_e(a,s)\subset B_d(a,r)$. $\boxtimes$

<u>"⇐"</u>: Ol. että $\forall a\in X\ \forall r>0\ \exists s>0: B_e(a,s)\subset B_d(a,r)$.
Ol. $U\in\mathcal{T}_d$. Osoitettava, että $U\in\mathcal{T}_e$. Ol. sitä varten, että $x\in U$. Silloin $\exists r>0: B_d(x,r)\subset U$. Mutta nyt alkuoletuksen mukaan $\exists s>0$ se. $B_e(x,s)\subset B_d(x,r)$, jolloin itse as. $B_e(x,s)\subset U$. Koska $x\in U$ oli mieliv., on osoitettu, että U on e-avoin eli $U\in\mathcal{T}_e$. $\square$

<u>Kysymys:</u> Auttaako kuutonen kakkosessa?

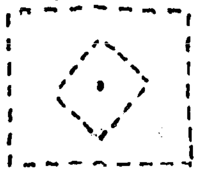
<u>Vastaus ja huomautus</u>: Kyllä auttaa: voisi sanoa, että tehtävän 2.i tuloksessa on kaksi tehtävän 6 tuloksen erikoistapauksen erikoistapausta!

(Ensinnä 2.i:ssä kuulien välille saatiin yhtälö, ei vain inkluusio "$\subset$", ja toiseksi 2.i:ssä oli konkreettiset metriikat.)

Huomaa, että vaikka 6:ta voitaisiin soveltaa kahteen suuntaan, $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_e$ ja $\mathcal{T}_e \subset \mathcal{T}_d$ (kuten 2.i:ssä voitaisiin), ei silti kuulien välille välttämättä saataisi yhtälöä:

Ajattele esimerkiksi esimerkkien 2.7.3 ja 2.7.4 kuulien suhteita:

sekä



Toisaalta <u>pedagogisesti</u> voi sanoa päin vastoin: 2.i:ssä annettu todistus auttaa 6:n todistuksen ymmärtämistä.

Kuitenkin on hyödyllistä nähdä 2.i:hin myös tapa, jossa ei (ekspl.) puhuta kuulista:

(2) (i) <u>Toinen tapa</u>: Lauseen 10.2 mukaan vastaus kysymykseen (i) on <u>sama</u> kuin vastaus kysymykseen, onko $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, e)$ homeo.

Selvästi $id_{\mathbb{R}}$ on bijektio ja $id_{\mathbb{R}}^{-1} = id_{\mathbb{R}}$ (joukko-opillisesti); tutkitaan jvuutta eri suuntiin.

<u>$(\mathbb{R}, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, e)$</u>: Ol. $x \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Onko olemassa sellaista $\delta > 0$, että

$$e(id(x), id(y)) = \sqrt{|x-y|} < \varepsilon \quad \text{aina kun } y \in \mathbb{R} \text{ ja } d(x,y) = |x-y| < \delta \ ?$$

Kyllä, esim. $\delta = \varepsilon^2 > 0$ ja $\forall y \in \mathbb{R}$: $|x-y| < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{|x-y|} < \varepsilon$.

[Hieman yleisemmin ajatellen δ:n olemassaolo seuraa siitä, että ftio $z \mapsto \sqrt{|z|}$ on jva 0:ssa, jossa sillä on arvo 0: $\exists \delta > 0 : \forall z \in \mathbb{R} : |z| < \delta \Rightarrow \sqrt{|z|} < \varepsilon$. Mutta tällainen yleisyys ei riittäisi h1/t2:ssa osoittamaan, että e on metriikka.]

$\therefore$ id <u>on</u> jva $(\mathbb{R}, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, e)$. (Itse as. tasaisesti jva, ks. 12.11.)

<u>$(\mathbb{R}, e) \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$</u>: Ol. $x \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Onko olemassa sellaista $\delta > 0$, että

$$d(id(x), id(y)) = |x-y| < \varepsilon \quad \text{kun } y \in \mathbb{R} \text{ ja } e(x,y) = \sqrt{|x-y|} < \delta \ ?$$

Kyllä, esim. $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. [Tai käyttäen ftion $z \mapsto z^2$ jvuutta 0:ssa.]

$\therefore$ id <u>on</u> (tas.) jva myös $(\mathbb{R}, e) \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$.

Määritelmän 9.2 nojalla $id : (\mathbb{R}, d) \approx (\mathbb{R}, e)$ eli d ja e <u>ovat</u> ekvivalentteja (10.2).