Topologia I
Harjoitus 11 (viimeinen)
Viikko 17 (22.4.-26.4. 2013)
Ratkaisuehdotuksia
Teemu Saksala
teemu.saksala@helsinki.fi

1. (12:15 versio) Tutki ovatko seuraavat funktiot f tasaisesti jatkuvia määrittelyjoukoissaan:
   (i) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$,
   (ii) $f(x) = \sin(|x|_2)$, $x \in \mathbf{R}^n$, missä $|\cdot|_2$ on euklidinen normi.

Ratkaisu
(i) Huomataan aluksi, että kuvaus f on derivoituva joukossa $\mathbb{R}$, sillä se voidaan kirjoittaa derivoituvien kuvauksien h ja g osamääränä muodossa $f = \frac{g}{h}$. Lisäksi kuvaus h on aidosti positiivinen. Lasketaan kuvauksen f derivaatta ja pyritään soveltamaan väliarvolausetta.

$$|f'(x)| = |\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}| \overset{\triangle-e.y.}{\leq} \frac{1}{x^2+1} + 2\frac{x^2}{(x^2+1)^2} \overset{x^2+1\geq 1}{\leq} 1 + 2\frac{x^2}{1+x^2} \leq 3. \tag{1}$$

Olkoot $x, y \in \mathbb{R},\ x < y$. Koska f täyttää väliarvolauseen ehdot suljetulla välillä $[x, y]$, niin kaavan (1) nojalla pätee, että

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \leq 3|x-y|. \tag{2}$$

Olkoon, $\epsilon > 0$ ja $\delta = \frac{\epsilon}{3}$. Tällöin kaavan (2) nojalla

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon, \text{ kun } |x-y| < \delta.$$

Siis f on tasaisesti jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

(ii) Koska kuvaus $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva, niin voidaan soveltaa väliarvolausetta suljetulle välille $[a, b]$

$$|\sin(a) - \sin(b)| = |\cos(\xi)||a-b| \leq |a-b|.$$

Siis sin on 1-Lipschitz. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^n$. Voimme olettaa, että $|x|_2 \geq |y|_2$. Yllä olevan nojalla pätee

$$|f(x)-f(y)| = |\sin(|x_2|)-\sin(|y|_2)| \leq ||x|_2-|y|_2| = |x-y+y|_2-|y|_2 \overset{\triangle-e.y.}{\leq} |x-y|_2.$$

Siis f on myös 1-Lipschitz. Kirjan huomion 12.13.3. nojalla f on tasaisesti jatkuva.

Vaihtoehtoinen tapa ilman sinin Lipschitz-ominaisuutta
Koska euklidinen normi $|\cdot|_2$ ja sin ovat jatkuvia, niin kuvaus f on jatkuva. Olkoon $g : \mathbb{R}^n \to \overline{B}(0, 2\pi)$ se kuvaus, joka liu'uttaa pisteen x pitkin x:n ja origon kautta kulkevaa puolisuoraa siksi pisteeksi $g(x)$, jonka normille pätee $\sin(|g(x)|_2) = \sin(|x|_2)$. Tälläinen kuvaus on olemassa, sillä sin on 2π-periodinen. Näin ollen pätee, että $f(x) = f(g(x))$ ja $|x-y|_2 \geq |g(x)-g(y)|_2$.

Koska kuula $\overline{B}(0, 2\pi)$ on kompakti, niin kirjan lauseen 13.36 nojalla $f|_{\overline{B}(0,2\pi)}$ on tasaisesti jatkuva. Tämä tarkoittaa sitä, että jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, s.e. pätee

$$|f(x_0) - f(y_0)| < \epsilon, \text{ kun } |x_0 - y_0|_2 < \delta \text{ ja } x_0, y_0 \in \overline{B}(0, 2\pi).$$

Olkoon $\epsilon > 0$ ja $\delta_\epsilon > 0$ tätä ϵ:ia vastaava δ kuulassa $\overline{B}(0, 2\pi)$. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^n$ s.e. $|x - y|_2 < \delta_\epsilon$. Tällöin pätee

$$|f(x) - f(y)| = |f(g(x)) - f(g(y))| < \epsilon, \text{ sillä } |g(x) - g(y)|_2 \leq |x - y|_2 < \delta_\epsilon.$$

Siis f on tasaisesti jatkuva koko $\mathbb{R}^n$:ssä.

2. (13:3) Tutki seuraavista euklidisen avaruuden joukoista A_j, ovatko ne (i) kompakteja, (ii) täydellisiä: $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 4\}$, $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 < 4\}$, $A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2\}$.

Ratkaisu
Muistetaan, että Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ pätevät seuraavat väitteet:

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ on täydellinen jos ja vain jos } A \text{ on suljettu}$$

ja

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ on kompakti jos ja vain jos } A \text{ on suljettu ja rajoitettu.}$$

(i) Kirjoitetaan joukko A_1 muodossa

$$A_1 = f^{-1}[-\infty, 4], \; f((x, y)) = x^2 + 3y^2.$$

Näin ollen A_1 on jatkuvan funktion alkuvana suljetusta joukosta suljettu. Siis se on täydellinen. Koska joukolle A_1 pätee

$$A_1 \subset [-2, 2] \times [-2, 2].$$

Niin A_1 on rajoitettu. Siis A_1 on kompakti.

(ii) Selvästi $(2,0) \notin A_2$. Olkoon $r > 0$. Nyt joukon A_2 määritelmän nojalla pätee $B(0,r) \cap A_2 \neq \emptyset$, joka tarkoittaa, ettei A_2 ole suljettu. Siis A_2 ei ole täydellinen eikä kompakti.

(iii) Kirjoitetaan joukko A_3 muodossa

$$A_3 = f^{-1}[-\infty, 0], \; f((x,y,z)) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Näin ollen A_3 on jatkuvan funktion alkuvana suljetusta joukosta suljettu. Siis se on täydellinen. Joukko A_3 ei kuitenkaan ole rajoitettu, sillä suora $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ sisältyy siihen. Siis A_3 ei ole kompakti.

3. (13:9) Olkoon (X,d) metrinen avaruus, $r > 0$, ja (x_n) sellainen X:n pistejono, että $d(x_n, x_m) \geq r$ kaikilla $n \neq m$. Näytä, ettei X ole kompakti.

Ratkaisu

Muistetaan, että avaruus (X,d) on kompakti, jos sen jokaisella jonolla on suppeneva osajono. Olkoon $a \in X$ ja $n \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että on olemassa sellainen piste $a \in X$ ja jonon (x_n) osajono (x_{n_k}), joille pätee $x_{n_k} \to a$, kun $k \to \infty$. Näin ollen pisteen a ympäristössä $B(a, \frac{r}{2})$ on äärettömän monta jonon (x_{n_k}) jäsentä. Olkoot x_{n_i} ja x_{n_j} jotkin kaksi näistä pisteistä ja oletetaan, että ne eivät ole sama piste. Tällöin pätee

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) < r,$$

joka on ristiriita lukujono (x_n) määritelmän kanssa. Tämä tarkoittaa sitä, että lukujonolla (x_n) ei ole suppenevia osajonoja, jolloin avaruus X ei ole kompakti. (*Vaihtoehto:* koska $d(x_{n_i}, x_{n_j}) \geq r$ aina kun $i \neq j$, niin mikään osajono (x_{n_k}) ei ole Cauchy, joten (x_{n_k}) ei myöskään voi supeta (Lause 12.3).)

4. (13:4) Olkoon X metrinen avaruus ja $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ laskeva jono epätyhjiä kompakteja X:n osajoukkoja. Osoita, että leikkausjoukko $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ on epätyhjä ja kompakti.

Ratkaisu

Koska joukot A_n ovat epätyhjiä, niin jokaisella $n \in \mathbb{N}$ voidaan valita $x_n \in A_n$. Koska A_1 on kompakti, niin jonolla (x_n) on joukossa A_1 suppeneva osajono

$(y_n)_{n=1}^{\infty}$. Olkoon $a = \lim_{n\to\infty} y_n$. Jonon (x_n) konstruktion takia osajonon $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ häntä $(y_n)_{n=2}^{\infty}$ sisältyy joukkoon A_2. Koska jokainen suppeneva jono on Cauchy, niin myös jono $(y_n)_{n=2}^{\infty}$ Cauchyn jono kompaktissa joukossa A_2. Lauseen 13.28. nojalla kompaktit joukot ovat aina täydellisiä. Näin ollen jono $(y_n)_{n=2}^{\infty}$ suppenee joukossa A_2. Koska jono $(y_n)_{n=2}^{\infty}$ on jonon $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ osajono, niin raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla pätee, että $a \in A_2$.

Toistamalla samaa päättelyä induktiivisesti voidaan osoittaa, että a kuuluu jokaiseen joukoista A_k. Siis $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Tämä osoittaa, ettei joukkojen A_k leikkaus ole tyhjä. Joukko $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ on lisäksi kompakti, sillä lauseen 13.6. nojalla jokainen joukoista A_k on suljettu ja näin ollen niiden leikkausjoukko on myös suljettu. Toisaalta lauseen 13.7. nojalla kompaktin joukon A_1 suljettu osajoukko $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ on myös kompakti.

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^3$ suljettu ja rajoitettu joukko. Näytä, että on olemassa sellainen $(c_1, c_2, c_3) \in A$, että $x + y + z \geq c_1 + c_2 + c_3$ kaikilla $(x, y, z) \in A$.

Ratkaisu
Tehtävänannon perusteella joukko A on kompakti. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$, $f((x, y, z)) = x + y + z$. Tällöin f on jatkuva, sillä se on summakuvauksen rajoittuma joukkoon A. Kirjan lauseen 13.21 nojalla f:llä on minimi joukossa A. Olkoon tämä minimipiste $(c_1, c_2, c_3) \in A$, jolloin kuvauksen f määritelmän nojalla pätee, että

$$x + y + z \geq c_1 + c_2 + c_3, \text{ jokaisella } (x, y, z) \in A.$$

6. (14:12) Olkoon $E = \{(x, y) : |x| < 2|y|\} \subset \mathbb{R}^2$. (i) Onko E yhtenäinen? (ii) Onko sulkeuma $\overline{E}$ yhtenäinen?

Ratkaisu
(i) Osoitetaan, ettei E ole yhtenäinen. Kirjoitettaan joukko E uudestaan muodossa

$$E = \{(x, y) : |x| < 2|y|\} = \{(x, y) : |x| < 2y, y > 0\} \cup \{(x, y) : |x| < -2y, y < 0\}.$$

Koska joukot $\{(x, y) : |x| < 2y, y > 0\}$ ja $\{(x, y) : |x| < -2y, y < 0\}$ ovat erillisiä, epätyhjiä ja avoimia, niin E ei ole määritelmän nojalla yhtenäinen.

(ii) Osoitetaan ensiksi, että $\overline{E} = \{(x, y) : |x| \leq 2|y|\}$. Koska joukko $\{(x, y) :$

$|x| \leq 2|y|\}$ on alkukuvaehdon nojalla suljettu ja sisältää joukon E, niin se sisältää myös E:n sulkeuman. Koska joukko $\{(x, y) : |x| \leq 2|y|\}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$E \cup \{(x, y \in \mathbb{R}^2) : y = \frac{x}{2}\} \cup \{(x, y \in \mathbb{R}^2) : y = -\frac{x}{2}\},$$

niin riittää osoittaa, että jokainen piste suorilla $y = \frac{x}{2}$ tai $y = -\frac{x}{2}$ kuuluu joukkoon $\overline{E}$. Jos (x, y), $x \geq 0$ kuuluu suoralle $y = \frac{x}{2}$, niin jokaisella $\epsilon > 0$ piste $(x, \frac{x}{2} + \epsilon) \in E \cap B((x, y), 2\epsilon)$. Siis $(x, y) \in \overline{E}$, kun $x \geq 0$. Symmetrisyyden nojalla olemme osoittaneet väitteen $\overline{E} = \{(x, y) : |x| \leq 2|y|\}$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\overline{E}$ on yhtenäinen.

Olkoon $\mathcal{L}$ kokoelma sellaisia origon kautta kulkevia suoria, joiden kulmakertoimille k pätee $|k| \leq \frac{1}{2}$. Tällöin joukon $\overline{E}$ määritelmän nojalla pätee, että

$$\overline{E} = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L.$$

Olkoon $L = \{(x, kx) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{L}$ ja $f_L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ se kuvaus, jolle pätee, $f_L(x) = (x, kx)$. Näin ollen f_L on jatkuva, sillä sen komponenttikuvaukset ovat jatkuvia. Koska $\mathbb{R}$ on yhtenäinen ja f_L jatkuva, niin lauseen 14.16 nojalla $f_L(\mathbb{R}) = L$ on yhtenäinen. Koska $\overline{0} \in L$ jokaisella $L \in \mathcal{L}$, niin lauseen 14.12. nojalla $\overline{E}$ on yhtenäinen.

Vaihtoehtoinen tapa polkuyhtenäisyyden avulla.
Kirjan lauseen 14.23 nojalla riittää osoittaa, että $\overline{E}$ on polkuyhtenäinen. Olkoot $x, y \in \overline{E}$. Nyt murtoviiva, joka kulkee x:stä origon kautta pisteeseen y sisältyy joukkoon $\overline{E}$, sillä se voidaan esittää sellaisina janoina, jotka sisältyvät origon kautta kulkeviin suoriin, joiden kulmakertoimien itseisarvo on vähintään $\frac{1}{2}$. Olkoon

$$\gamma : [0, 1] \to \overline{E}, \gamma(t) = \begin{cases} (1 - 2t)x, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2t - 1)y, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Myös nyt pätee, että $\gamma([0, 1]) \subset \overline{E}$, sillä γ:n kuva on juuri yllä kuvattu murtoviiva. Näin ollen löydetään joukon $\overline{E}$ polku, joka yhdistää pisteet x ja y. Siis $\overline{E}$ on polkuyhtenäinen.