Topologi I
Övning 9
Vecka 15 (8.4.-12.4. 2013)

1. (delvis 11:5) Undersök om följande vektorföljder (x_n) konvergerar i den euklidiska metriken i rummet $\mathbb{R}^3$. Ifall de konvergerar bestäm gränsvärdet av följden.
(i) $x_n = (\frac{1}{n}, e^{-n}, (-1)^n)$,
(ii) $x_n = (\frac{1}{n}, e^{-n}, n)$,
(iii) $x_n = (\sin(1 + \frac{1}{n}), 1, \frac{1}{n^3})$.

2. (11:4) Anta att mängden X är försedd med den diskreta $\{0, 1\}$-metriken d. Under vilket villkor konvergerar punktföljden (x_n) i X med avseende på metriken d ?

3. Vi betraktar funktonsföljden (f_n) i normrummet $C[0, 1]$ som består av de kontinuerliga funktionerna på $[0, 1]$, där $f_n(t) = e^{t/n}$ då $t \in [0, 1]$ och $n \in \mathbf{N}$. Visa att $f_n \to 1$ då $n \to \infty$ med avseende på max-normen $|\cdot|_\infty$, där $|g|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |g(t)|$ då $g \in C[0, 1]$ och $1(t) = 1$ för alla $t \in [0, 1]$. *Påminnelse:* medelvärdessatsen är användbar.

4. (11:7) Låt $x_n = (\cos(n\pi/2), \sin(n\pi/2)) \in \mathbb{R}^2$ då $n \in \mathbf{N}$. Bestäm alla anhopningsvärden till vektorföljden (x_n). För varje anhopningsvärde sök någon delföljd (x_{n_k}) som konvergerar mot denna punkt.

5. (väsentligen 11:3) Vi antar det vara känt att det finns en bijektion $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, där $\mathbb{Q}$ är mängden av rationella tal, så att $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ om vi betecknar $q_n = q(n)$ för $n \in \mathbb{N}$. Om $x \in \mathbb{R}$ är ett godtyckligt reellt tal sök en sådan delföljd (q_{n_k}) till (q_n) att $q_{n_k} \to x$ då $k \to \infty$ i den vanliga metriken i $\mathbb{R}$. Konklusion: varje reellt tal $x \in \mathbf{R}$ är ett anhopningsvärde till (q_n).
Idén. Motivera hur man kan välja successivt sådana index $n_1 < n_2 < \ldots$ att $|x - q_{n_k}| < \frac{1}{k}$ för alla $k \in \mathbb{N}$.

6. (11:9) Låt X vara ett metriskt rum och (x_n) en punktföljd i rummet X. Låt

$$A = \{a \in X : a \text{ är ett anhopningsvärde till } (x_n)\}.$$

Visa att A är en sluten mängd i rummet X. *Tips:* visa exempelvis att det slutna höljet $\overline{A} \subset A$. För detta är Satserna 11.6 och 11.18 användbara.