Topologi I
Övning 8
Veckorna 13 och 14 (25.3.-27.3 och 4.4.-5.4. 2013)

1. Låt $f(x) = (x, \sin(x))$ då $x \in \mathbf{R}$. Undersök om avbildningen f är M-bilipschitz $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ för någon konstant $M \geq 1$. Planet $\mathbf{R}^2$ är försedd med den euklidiska metriken.

2. (10:1) Låt $e(s,t) = \sqrt{|s-t|}$ då $s, t \in \mathbb{R}$, så att e är en metrik i $\mathbb{R}$ (Övning 2:2). Undersök om metriken e är (i) ekvivalent, (ii) bilipschitz-ekvivalent, med den vanliga metriken d i $\mathbb{R}$.

3. (9:7) Låt $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig funktion och

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^2$$

vara grafen till funktionen f. Visa att $\Gamma \approx \mathbf{R}$. Planet $\mathbf{R}^2$ är försedd med den euklidiska metriken.

4. (9:4) Låt $f : X \to Y$ vara en homeomorfism och $A \subset X$. Visa detaljerat att $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ och $f(\partial A) = \partial(f(A))$.

5. (9:14) Låt $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Visa att ekvationen

$$f(x,y) = (x, y + g(x)), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

definierar en homeomorfism $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, samt bestäm ett uttryck för den inversa avbildningen f^{-1}.

6. (10:4) Låt d och e vara metriker i mängden X. Visa att $\tau_d \subset \tau_e$ om och endast om mot varje $a \in X$ och varje $r > 0$ finns ett sådant $s > 0$ att $B_e(a,s) \subset B_d(a,r)$. Ovan är $\tau_d = \{U \subset X : U \text{ är öppen i } (X,d)\}$.

Påminnelse: påsklov tor 28.3 - ons 3.4.