Topologi I
Övning 7
Vecka 12 (18.3.-22.3. 2013)

1. (7:2 version) Låt $\overline{B}(\overline{0},1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Undersök för följande mängder A vilka som är öppna eller slutna i mängden $\overline{B}(\overline{0},1)$ med den relativa topologin:
(i) $A = \{(x,y) \in \overline{B}(\overline{0},1) : xy > 0\}$,
(ii) $A = \{(x,y) \in \overline{B}(\overline{0},1) : x \geq 0\}$.

2. (8:2) Låt $X = \mathbb{R}^2$ och $A = \{(x,y) : xy \geq 0, x \geq 0, |y| < 1\}$. Bestäm mängderna $int(A)$, ∂A och $\overline{A}$. Lösningen får basera sig på lämpliga bilder.

3. Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $A \subset X$ en delmängd. Visa:
(i) A är öppen i X om och endast om $A \cap \partial A = \emptyset$,
(ii) A är sluten i X om och endast om $\partial A \subset A$.

4. (8:5) Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $A \subset X$ en delmängd.
(i) Visa att $\partial(\partial A) \subset \partial A$. *Tips:* Sats 8.3.(5) eller (4).
(ii) Kontrollera att $\partial(\partial A) \neq \partial A$ då $A = \mathbb{Q}$ (de rationella talen) och $X = \mathbb{R}$. [Påminnelse: på föreläsningarna visades att $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.]

5. Visa att $]0,\infty[\; \approx \mathbb{R}$.

6. Låt $|\cdot|_2$ vara den euklidiska metriken i rummet $\mathbb{R}^n$ och $B(\overline{0},1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_2 < 1\}$ vara den öppna kulan med origo som mittpunkt. Visa att avbildningen

$$f(x) = \frac{x}{1-|x|_2}, \quad x \in B(\overline{0},1),$$

utgör en homeomorfism $B(\overline{0},1) \to \mathbb{R}^n$. (Den inversa avbildningen är

$$g(y) = \frac{y}{1+|y|_2}, \quad y \in \mathbb{R}^n.)$$