

Topologi I

Övning 6

Vecka 11 (11.3.-15.3. 2013)

1. Låt $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$. Bestäm anhopningspunkterna till mängden A och det slutna höljet \overline{A} , då \mathbf{R} är försedd med den diskreta $\{0, 1\}$ -metriken (Väisälä, Ex. 2.5.2).

2. (6:14 delvis) Bestäm anhopningspunkterna till mängden A i planet \mathbf{R}^2 , då (i) $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, (ii) $A = \mathbf{Q} \times \mathbf{Z}$. Ovan är \mathbf{Z} mängden av heltal, och \mathbf{Q} mängden av rationella tal.

3. Låt E vara ett rum med inre produkt och $A \subset E$ en icke-tom delmängd. Visa att ortokomplementet

$$A^\perp = \{y \in E : y \cdot x = 0 \text{ för alla } x \in A\}$$

är en sluten mängd i E . *Hjälp*: $A^\perp = \bigcap_{x \in A} f_x^{-1}(\{0\})$, där $f_x(y) = y \cdot x$ då $y \in E$. Kom ihåg att varje avbildning f_x är kontinuerlig (Övning 4:3).

4. Låt (X, d) vara ett metriskt rum, $A \subset X$ en mängd och $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$ dess komplementmängd. Visa: A är öppen i X om och endast om avståndet $r(x) = d(x, A^c) > 0$ för alla $x \in A$. *Tips*: om $r(x) > 0$, så gäller att $B(x, r(x)) \subset A$. (Rita en bild!)

5. Låt E vara ett rum med inre produkt, där $u \cdot v$ betecknar inre produkten av $u, v \in E$. Visa: om f och g är kontinuerliga avbildningar $E \rightarrow E$, så är avbildningen

$$f \cdot g : E \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x), \quad x \in E,$$

kontinuerlig i E . *Tips*: kontrollera först att $4u \cdot v = |u + v|^2 - |u - v|^2$ då $u, v \in E$, samt använd kontinuitetsresultaten från kapitel 5.

6. (6:12 version) Låt $f, g : X \rightarrow Y$ vara kontinuerliga avbildningar, där X och Y är metriska rum. Visa: (i) mängden $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ är sluten i X .

(ii) Om $B \subset X$ är en sådan delmängd att restriktionerna satisfierar $f|_B = g|_B$, så gäller också att $f|_{\overline{B}} = g|_{\overline{B}}$.

Tips: om $x \in A^c$ så sök enligt kontinuiteten en sådan öppen kula $B(x, r)$ att $f(B(x, r)) \cap g(B(x, r)) = \emptyset$.

Påminnelse: Föreläsningarna på 2. perioden börjar mån 11.3. Räkneövningar redan under veckan 11.3. - 15.3. (övning 6).