

Topologi I

Övning 5

Vecka 8 (18.2.-22.2. 2013)

1. (6:1 delvis) Är mängden $A \subset \mathbb{R}^2$ sluten (i den euklidiska metriken), då (i) $A = \{(x, y) : x < 1\}$, (ii) $A = \{(x, y) : x \neq 0, |y| \leq |x|\}$? Bestäm det slutna höljet \bar{A} , om A inte är en sluten mängd.

2. (5:2) Visa att mängden

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 1 < xyz < \sin(1 + y)\}$$

är öppen i \mathbb{R}^3 försedd med den euklidiska metriken. *Hjälp*: urbildskriteriet (Väisälä 4.8).

3. Låt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ och $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 2\}$. Visa:

(i) A och B är slutna mängder, och $A \cap B = \emptyset$, (ii) avståndet $d(A, B) = 0$.

4. (6:2) Låt \mathbb{Q} vara mängden av rationella tal och \mathbb{Q}^c mängden av irrationella tal. Visa att de slutna hölkena $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ och $\overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$ (med avseende på den vanliga metriken). *Påminnelse*: (Analys I) om $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ är godtyckliga reella tal, så finns det $q \in \mathbb{Q}$ samt $r \in \mathbb{Q}^c$ för vilka $x < q < y$ och $x < r < y$.

5. (6:5) Låt A och B vara slutna mängder i \mathbb{R} . Visa att den kartesiska produktmängden $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ är sluten i planet \mathbb{R}^2 . *Påminnelse*: urbildskriteriet för slutna mängder (Väisälä 6.13).

6. (6:18 och 6:19) Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Visa:

(i) om $F \subset X$ är en sluten mängd, så är $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, där $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ och varje U_n är en öppen mängd i X .

(ii) om $U \subset X$ är en öppen mängd, så är $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, där $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ och varje F_n är en sluten mängd i X .

Tips: välj $U_n = \{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\}$ då $n \in \mathbb{N}$. I fallet (ii) gå till komplementmängderna.

Påminnelse: Det första kursprovet är tisdag 26.2 kl 13-15. I kursprovet får ni ha med en minneslapp av storlek A4 (= 1 sida). Anmäl åt föreläsaren per e-mail om kursprovstiden inte är möjlig (ett alternativt kursprov ordnas vid behov).

Provområdet: kapitel 0 - 6 (sidorna 6 - 53) i kompendiet. Repetition och tidigare kursprovsuppgifter ons 20.2. ca. kl 11-12.

2. perioden av kursen börjar mån 11.3. Övning 6 under vecka 11 (11.3. - 15.3.). Uppgifterna kommer på kursens hemsida under vecka 10 senast torsdag 7.3.