Topologi I
Övning 4
Vecka 7 (11.2.-15.2. 2013)

1. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara avbildingen $f(x) = x^3 + \sin(x)$, där $x \in \mathbb{R}$. Sök en sådan konstant $M \geq 0$ med hjälp av medelvärdessatsen att f är en M-Lipschitz avbildning på intervallet $[0, 2]$.

2. (4:5) Låt $f : X \to Y$ vara M-Lipschitz och $g : Y \to Z$ M'-Lipschitz. Verifiera att den sammansatta avbildningen $g \circ f : X \to Z$ är MM'-Lipschitz.

3. (4:8) Låt $f(0, 0) = 0$ och $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ då $(x, y) \neq (0, 0)$. Visa att funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är diskontinuerlig i origo $(0, 0)$, men att restriktionen av f till varje linje genom origo är kontinuerlig i origo. [En linje genom origo har formen $x = 0$ eller $y = cx$, där $c \in \mathbb{R}$.]

4. (5:4) Låt E vara ett rum med inre produkt, $a \in E$ och $f(x) = x \cdot a$, då $x \in E$. Verifiera att avbildningen $f : E \to \mathbb{R}$ är Lipschitz, och alltså kontinuerlig i E.

5. Låt $(E, |\cdot|)$ vara ett normrum. Visa att mängden

$$A = \{x \in E : \frac{1}{3} < e^{-|x|^2} < \frac{1}{2}\}.$$

är öppen i E. *Hjälp.* Tillämpa urbildskriteriet för kontinuitet på en lämplig sammansatt avbildning (Väisälä, Satserna 4.8 och 4.12).

6. (3.11) Låt (X, d) vara ett metriskt rum, där X är en ändlig mängd. Visa att (X, d) är ett diskret rum, dvs. att varje punkt $x \in X$ är en isolerad punkt. *Tips:*

$$c = \min_{x,y \in X, x \neq y} d(x, y) > 0$$

(motivera varför).

Påminnelse: Kursens första kursprovet är tisdag 26.2.2013 kl 13-15. Anmäl åt föreläsaren ifall denna tid inte är möjlig pga. förhinder (ett alternativt kursprovstillfälle ordnas vid behov).

Till kursprovet får man medta en minneslapp av storleken A4 (= 1 sida!).