Topologi I
Övning 3
Vecka 5 (4.2.-8.2. 2013)

1. Låt $A_t = [t, 2t] = \{x \in \mathbb{R} : t \leq x \leq 2t\}$ för $t > 0$. Bestäm $\bigcup_{t>0} A_t$ och $\bigcap_{t>0} A_t$.

2. Låt (X, d) vara ett metriskt rum, $a \in X$, $B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$ en öppen kula samt $\overline{B}(a, r)$ motsvarande slutna kula, då $r > 0$. Visa att

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B(a, 1 + 1/n) = \overline{B}(a, 1).$$

3. Undersök om A är en öppen mängd i den euklidiska metriken i $\mathbf{R}^2$, då

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0\}.$$

4. Visa att

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

är en öppen mängd i den euklidiska metriken i planet $\mathbf{R}^2$.

5. (3:6 delvis) Låt $C[0, 1]$ vara det rum som består av kontinuerliga avbildningar $[0, 1] \to \mathbb{R}$ försedd med max-metriken $d(f, g) = \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$. Visa att mängden

$$A = \{f \in C[0, 1] : f(t) > 0 \text{ kaikilla } t \in [0, 1]\}$$

är öppen i $C[0, 1]$. *Tips:* om $g \in A$, så enligt Analys I antar g sitt minsta värde i $[0, 1]$, dvs. det finns $t_0 \in [0, 1]$ så att $g(t) \geq g(t_0) > 0$ för alla $t \in [0, 1]$. Visa med hjälp av triangelolikheten i $\mathbf{R}$ att $B(g, r) \subset A$ då $r = g(t_0)/2$.

6. (3:7) Låt (X, d) vara ett metriskt rum och $f : X \to \mathbf{R}$ en sådan avbildning att

$$A_r = \{x \in X : f(x) < r\}$$

är en öppen mängd för alla rationella tal $r \in \mathbf{Q}$. Visa att A_r är en öppen mängd för alla $r \in \mathbf{R}$. *Tips:* välj en sådan talföljd $(q_n) \subset \mathbf{Q}$ att $q_n < r$ för alla n och $q_n \to r$ då $n \to \infty$, samt använd att en union av öppna mängder är öppen (Väisälä, 3:4).

Extra poäng: Extra poäng ges för avklarade räkneövningsuppgifter enligt följande (för kursproven): för varje räkneövning 4-6 uppgifter = +1 p och 2-3 uppgifter = +1/2 p. Största antal extra poäng är alltså 11 p. Extra poängen adderas till de poäng som erhålls från kursproven (max 2 x 24 = 48 p).