Topologi I
Övning 2
Vecka 5 (28.1.-1.2. 2013)

1. Låt $|x|_1 = |x_1| + |x_2|$, då $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Skissera den slutna kulan $\overline{B}(\overline{0}, 2)$ för den metrik som motsvarar $|\cdot|_1$, där $\overline{0} = (0, 0)$.

2. (2.4) Undersök om d och e är metriker på den reella linjen $\mathbf{R}$, då
(i) $d(s,t) = |s-t|^2$, $(s, t \in \mathbf{R})$,
(ii) $e(s,t) = \sqrt{|s-t|}$, $(s, t \in \mathbf{R})$.
Tips. För (ii) verifiera först att $\sqrt{s+t} \leq \sqrt{s} + \sqrt{t}$ då $s, t \geq 0$.

3. (2.11 delvis) Låt $S(\overline{0}, 1)$ vara sfären i den euklidiska metriken i planet $\mathbf{R}^2$. Bestäm diametern $d(S(\overline{0}, 1))$, då
(i) d är den euklidiska metriken,
(ii) d är den metrik som bestäms av normen $|\cdot|_1$ från uppgift 2:1.
Påminnelse. För (ii) lönar det sig att komma ihåg Schwarz olikhet i planet $\mathbf{R}^2$ (Väisälä, 1.4).

4. (2.12) Låt $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} : f$ kontinuerlig i intervallet $[0,1]\}$ försedd med max-normen $|f - g|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$. Låt dessutom $p_n(t) = t^n$, då $t \in [0,1]$ och $n \in \mathbf{N}$, samt $A = \{p_n : n \in \mathbf{N}\}$. Bestäm diametern $d(A)$ i det metriska rummet $C[0,1]$.

5. Bestäm avståndet $d(A, B)$ mellan mängderna $A = \{(x,y) : x^2 + 1 + y \leq 0\}$ och $B = \{(x,y) : y > 0\}$ i planet med avseende på (i) den euklidiska metriken, (ii) den diskreta $\{0,1\}$-metriken.

6. Låt (X, d) vara ett metriskt rum och $A \subset X$, $B \subset X$ vara sådana mängder att $A \cap B \neq \emptyset$. Visa att det för diametern $d(A \cup B)$ av unionen $A \cup B$ gäller att
$$d(A \cup B) \leq d(A) + d(B).$$

Ett exemplar av räkneövningsuppgifterna finns för kopiering i rum C127.