

Topologi I

Övning 11 (sista)

Vecka 17 (22.4.-26.4. 2013)

1. (12:15 version) Undersök om följande funktioner  $f$  är likformigt kontinuerliga i sina definitionsmängder:

(i)  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,

(ii)  $f(x) = \sin(|x|_2)$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$ , där  $|\cdot|_2$  är den euklidiska normen.

2. (13:3) Undersök om följande mängder  $A_j$  i det euklidiska rummet är (i) kompakta, (ii) fullständiga:  $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 4\}$ ,  $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 < 4\}$ ,  $A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2\}$ .

3. (13:9) Låt  $(X, d)$  vara ett metriskt rum,  $r > 0$ , och  $(x_n)$  en sådan punktföljd i  $X$  att  $d(x_n, x_m) \geq r$  för alla  $n \neq m$ . Visa att  $X$  inte är kompakt.

4. (13:4) Låt  $(X, d)$  vara ett metriskt rum och  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  en avtagande följd av icke-tomma kompakta delmängder till  $X$ . Visa att snittmängden  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  är icke-tom och kompakt. *Råd:* Börja med att välja  $x_n \in A_n$  för alla  $n$ .

5. Låt  $A \subset \mathbb{R}^3$  vara en sluten och begränsad mängd. Visa att det finns en punkt  $(c_1, c_2, c_3) \in A$  så att  $x + y + z \geq c_1 + c_2 + c_3$  för alla  $(x, y, z) \in A$ . *Tips:* Sats 13.26 och en lämplig kontinuerlig funktion  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

6. (14:12) Låt  $E = \{(x, y) : |x| < 2|y|\} \subset \mathbb{R}^2$ . (i) Är  $E$  en sammanhängande mängd? (ii) Är det slutna höljet  $\overline{E}$  sammanhängande?

*Påminnelse:* 2. kursprovet är tisdag 7.5. kl 13-15. Anmäl åt föreläsaren per e-mail ifall denna tid är olämplig pga. hinder. Ett alternativt kursprov ordnas.

*Provområdet:* kapitel 7 - 13, sidorna 54 - 109. Produktrum (avsnitt 10.8 - 10.15, 11.9 - 11.10, 13.16) och täcken (avsnitt 13.31 - 13.35, 13.37 - 13.40) har **inte behandlats** under föreläsningarna 2013. Jag diskuterar kapitel 14 (sammanhängande mängder) kortfattat under sista veckan, men kapitel 14 hör inte till provområdet för 2. kursprovet. En översikt av gamla kursprovsuppgifter ons 24.4 med början ca. kl 11.