Topologi I
Övning 10
Vecka 16 (15.4.-19.4. 2013)

1. (11:10) Låt $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara funktionen $f_n(x) = \max\{0, x - n\}$ då $x \in \mathbb{R}$ och $n \in \mathbb{N}$. Undersök om funktionsföljden (f_n) konvergerar i $\mathbb{R}$, (i) punktvis, (ii) likformigt. Undersök samma frågor också då $\mathbb{R}$ är försedd med den diskreta $\{0, 1\}$-metriken.

2. (11:14) Vi definierar funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ på följande sätt: $f(x, y) = 1$, då $x^4 < y < x^2$, och $f(x, y) = 0$ i övriga punkter (x, y). Visa:
(i) $\lim_{z \to \bar{0}, z \in L} f(z) = 0$ längs alla linjer L genom origo,
(ii) gränsvärdet $\lim_{z \to \bar{0}} f(z)$ saknas.

3. (12:1) Låt (X, d) vara ett metriskt rum och $(x_n) \subset X$ en följd. Visa: (x_n) är en Cauchy-följd i X om och endast om diametern $d(A_n) \to 0$ då $n \to \infty$, där $A_n = \{x_j : j \geq n\}$, då $n \in \mathbb{N}$.

4. (12:11) Låt X vara ett fullständigt metriskt rum och $f : X \to Y$ en bilipschitz-avbildning. Visa att bilden $f(X)$ är fullständig.

5. (väsentligen 12:13) Sök ett närmevärde till roten av $x^3 - 7x + 1 = 0$ i intervallet $[0, 1]$ genom att tillämpa Banachs fixpunktsats på funktionen $f(x) = (x^3 + 1)/7$. Verifiera att f satisfierar satsens antaganden i intervallet $[0, 1]$. Hur stort bör n vara för att felet är $< \frac{1}{100}$ på basen av feluppskattningen $d(x_n, a) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$ i fixpunktsatsen (denna uppskattning härleddes på föreläsningen)?

6. (12:14) Låt $(E, |\cdot|)$ vara ett fullständigt normrum och $f : E \to E$ en kontraktion med konstanten $0 \leq q < 1$, dvs. $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ för alla $x, y \in E$. Definiera $F(x) = x + f(x)$, då $x \in E$. Visa att F är en homeomorfism $E \to E$, och att F också är en bilipschitz avbildning.
Tips: verifiera att

$$(1 - q)|u - v| \leq |F(u) - F(v)| \leq (1 + q)|u - v|, \quad u, v \in E.$$

Låt $y \in E$ vara godtyckligt och $g_y(x) = y - f(x)$ då $x \in E$. Visa med hjälp av Banachs fixpunktsats att avbildningen g_y har en entydig fixpunkt $x = G(y)$ för $y \in E$. Konklusion: F är en surjektion $E \to E$ och $G = F^{-1}$.

Påminnelse: 2. kursprovet är tisdag 7.5. kl 13-15. Meddela åt föreläsaren per e-mail ifall denna tid är olämplig pga. hinder (ett alternativt kursprov ordnas vid behov).