Topologi I
Övning 1
Vecka 4 (21.1.-25.1. 2013)

1. Låt $x = (1, 0, -1)$, $y = (0, 1, 2) \in \mathbf{R}^3$. Beräkna inre produkten $x \cdot y$ och euklidiska normerna $|x|_2$, $|y|_2$, $|x+y|_2$ och $|x-y|_2$, samt produkten $|x|_2 \cdot |y|_2$. (Här utgör $x \cdot y$ den vanliga inre produkten i vektorrummet $\mathbf{R}^3$.)

2. (1:3) Motivera varför formeln

$$x \cdot y = x_1 y_2 + x_2 y_1, \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

inte definierar en inre produkt i planet $\mathbb{R}^2$.

3. (1:4) Låt E vara ett rum med en inre produkt. *Ortokomplementet* till mängden $A \subset E$ är

$$A^\perp = \{x \in E : x \cdot y = 0 \text{ för alla } y \in A\}.$$

Visa att $A^\perp$ bildar ett vektorunderrum till E.

4. Förklara varför

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in C[0,1],$$

utgör en inre produkt i vektorrummet $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} : f \text{ kontinuerlig i } [0,1]\}$. I uppgiften kan du anta att de egenskaper om integralen som behövs är kända på basen av gymnasiet eller kursen Analys II.

5. (1:5) Verifiera att

$$|x|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

definierar en norm i rummet $\mathbb{R}^n$.

6. (1:6 delvis) (i) Visa att *parallellogramregeln*

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$$

gäller för varje $x, y \in E$, då E är ett rum med inre produkt.

(ii) Visa med hjälp av parallellogramregeln att $(\mathbf{R}^n, |\cdot|_\infty)$ inte är ett rum med en inre produkt då $n \geq 2$ och

$$|x|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Påminnelse: föreläsningsdagboken i kurssidan har en lista över de ämnen som behandlats på föreläsningarna. Extra poäng ges för lösta räkneövningsuppgifter (skalan meddelas nästa vecka).