Topologia I
Harjoitus 9
Viikko 15 (8.4.-12.4. 2013)

1. (osin 11:5) Tutki, suppenevatko seuraavat jonot (x_n) avaruuden $\mathbb{R}^3$ euklidisessa metriikassa. Myönteisessä tapauksessa määritä jonon raja-arvo.
(i) $x_n = (\frac{1}{n}, e^{-n}, (-1)^n)$,
(ii) $x_n = (\frac{1}{n}, e^{-n}, n)$,
(iii) $x_n = (\sin(1 + \frac{1}{n}), 1, \frac{1}{n^3})$.

2. (11:4) Olkoon joukko X varustettuna diskreetillä $\{0, 1\}$-metriikalla d. Millä ehdolla avaruuden X pistejono (x_n) suppenee metriikan d suhteen?

3. Tarkastellaan funktiojonoa (f_n) jatkuvien funktioiden muodostamassa normiavaruudessa $C[0, 1]$, missä $f_n(t) = e^{t/n}$ kun $t \in [0, 1]$ ja $n \in \mathbf{N}$. Näytä, että $f_n \to 1$ kun $n \to \infty$ max-normin $|\cdot|_\infty$ suhteen, missä $|g|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |g(t)|$ kun $g \in C[0, 1]$ ja $1(t) = 1$ kaikilla $t \in [0, 1]$. *Muistutus:* väliarvolauseesta on hyötyä.

4. (11:7) Olkoon $x_n = (\cos(n\pi/2), \sin(n\pi/2)) \in \mathbb{R}^2$ kun $n \in \mathbf{N}$. Määritä jonon (x_n) kasautumisarvot. Hae kullekin kasautumisarvolle jokin sitä kohti suppeneva osajono (x_{n_k}).

5. (oleellisesti 11:3) Pidetän tunnettuna, että on olemassa bijektio $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, missä $\mathbb{Q}$ on rationaalilukujen joukko, eli $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ kun merkitään $q_n = q(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Jos $x \in \mathbb{R}$ on mielivaltainen reaaliluku etsi sellainen jonon (q_n) osajono (q_{n_k}), että $q_{n_k} \to x$ kun $k \to \infty$ $\mathbb{R}$:n tavallisessa metriikassa. Päättele: jokainen reaaliluku $x \in \mathbf{R}$ on jonon (q_n) kasautumisarvo.
Idea. Perustele miten voidaan valita peräkkäin sellaisia indeksejä $n_1 < n_2 < \ldots$, että $|x - q_{n_k}| < \frac{1}{k}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

6. (11:9) Olkoon X metrinen avaruus ja (x_n) pistejono avaruudessa X. Olkoon

$$A = \{a \in X : a \text{ on jonon } (x_n) \text{ kasautumsiarvo}\}.$$

Näytä, että A on suljettu joukko avaruudessa X. *Vihje:* näytä esimerkiksi, että sulkeuma $\overline{A} \subset A$. Lauseista 11.6 ja 11.18 on silloin hyötyä.