Topologia I
Harjoitus 8
Viikot 13 ja 14 (25.3.-27.3 ja 4.4.-5.4. 2013)

1. Olkoon $f(x) = (x, \sin(x))$ kun $x \in \mathbf{R}$. Tutki, onko kuvaus f M-bilipschitz $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ jollakin vakiolla $M \geq 1$. Tasossa $\mathbf{R}^2$ on euklidinen metriikka.

2. (10:1) Olkoon $e(s,t) = \sqrt{|s-t|}$ kun $s, t \in \mathbb{R}$, jolloin tiedetään että e on metriikka $\mathbb{R}$:ssä (HT 2:2). Tutki, onko metriikka e (i) ekvivalentti, (ii) bilipschitz-ekvivalentti $\mathbb{R}$:n tavallisen metriikan d kanssa.

3. (9:7) Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jatkuva funktio ja

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^2$$

funktion f kuvaaja. Näytä, että $\Gamma \approx \mathbf{R}$. Tasossa $\mathbf{R}^2$ on euklidinen metriikka.

4. (9:4) Olkoon $f : X \to Y$ homeomorfismi ja $A \subset X$. Näytä yksityiskohtaisesti, että $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ ja $f(\partial A) = \partial(f(A))$.

5. (9:14) Olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että yhtälö

$$f(x,y) = (x, y + g(x)), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

määrittelee homeomorfismin $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ja määrää käänteiskuvauksen f^{-1} lauseke.

6. (10:4) Olkoon d ja e metriikkoja joukossa X. Näytä, että $\tau_d \subset \tau_e$ jos ja vain jos jokaista $a \in X$ ja jokaista $r > 0$ kohti on olemassa sellainen $s > 0$, että $B_e(a,s) \subset B_d(a,r)$. Edellä $\tau_d = \{U \subset X : U \text{ on avoin avaruudessa } (X,d)\}$.

Muistutus: pääsiäisloma to 28.3 - ke 3.4.