Topologia I
Harjoitus 7, ratkaisuehdotuksia, Valter Pohjola
Viikko 12 (18.3.-22.3. 2013)

1. (7:2 versio) Olkoon $\overline{B}(\overline{0},1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Tutki seuraavista joukoista A, mitkä niistä ovat avoimia tai suljettuja joukon $\overline{B}(\overline{0},1)$ relatiivitopologiassa:
(i) $A = \{(x,y) \in \overline{B}(\overline{0},1) : xy > 0\}$,
(ii) $A = \{(x,y) \in \overline{B}(\overline{0},1) : x \geq 0\}$.

Ratkaisu. Kohta (i): Kirjoitetaan A leikkauksena

$$A = \overline{B}(\overline{0},1) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}.$$

Nyt

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} = f^{-1}]0,\infty[,$$

missä $f(x,y) = xy$ on jatkuva (katso Lause 5.3). Alkukuvaehdon nojalla D on avoin. Lauseen 7.2 nojalla A on avoin $\overline{B}(\overline{0},1)$ relatiivitopologiassa.

Osoitetaan vielä, että A ei ole suljettu $\overline{B}(\overline{0},1)$ relatiivitopologiassa. Tämä voidaan osoittaa esimerkkiksi tarkastelemalla origoa. Kiekkoympäristöt $B(\overline{0},\varepsilon)$, $\varepsilon < 1$ ovat Lauseen 7.4 nojalla avoimia $\overline{B}(\overline{0},1)$ relatiivitopologiassa. Lisäksi

$$A \cap B(\overline{0},\varepsilon) \neq \emptyset, \quad \text{kun } \varepsilon < 1,$$

joten $\overline{0}$ kuuluu A:n sulkeumaan $\overline{B}(\overline{0},1)$ relatiivitopologiassa. Nyt kuitenkin $\overline{0} \notin A$, joten Lauseesta 6.8.(6) seuraa, että A ei ole suljettu $\overline{B}(\overline{0},1)$ relatiivitopologiassa.

Kohta (ii): Kirjoitetaan A leikkauksena

$$A = \overline{B}(\overline{0},1) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}.$$

Nyt

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} = f^{-1}[0,\infty[,$$

missä $f(x,y) = x$ on projektiokuvaus ja siten jatkuva. D on siis suljetun joukon alkukuva ja siten suljettu (Lause 6.14). Lauseesta 7.7 seuraa nyt, että A on suljettu $\overline{B}(\overline{0},1)$ relatiivitopologiassa.

Osoitetaan vielä, että A ei ole avoin $\overline{B}(\overline{0},1)$ relatiivitopologiassa. Tarkastellaan, jälleen origoa, kuten kohdassa (i). Nyt pätee, että

$$\big(\overline{B}(\overline{0},1) \setminus A\big) \cap B(\overline{0},\varepsilon) \neq \emptyset, \quad \text{kun } \varepsilon < 1.$$

Tästä seuraa, että $\overline{0}$ ei ole sisäpiste $\overline{B}(\overline{0},1)$ relatiivitopologiassa, vaikka $\overline{0} \in A$. A ei siis ole avoin (Lause 8.3.(2)).

2. (8:2) Olkoon $X = \mathbb{R}^2$ ja $A = \{(x,y) : xy \geq 0, x \geq 0, |y| < 1\}$. Määritä joukot $int(A)$, ∂A ja $\overline{A}$. Ratkaisussa voit nojautua sopiviin kuviin.

Ratkaisu. Joukko A voidaan esittää leikkauksena

$$A = \{(x,y) : xy \geq 0\} \cap \{(x,y) : x \geq 0\} \cap \{(x,y) : |y| < 1\}.$$

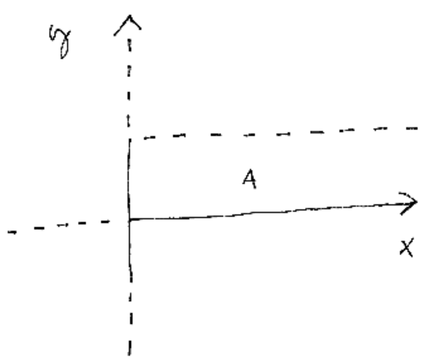
Alla olevasta kuvasta nähdään miltä A näyttää. (Huomaa, että katkoviiva ei ole A:n osajoukko ja että x-akselin alapuolelle jäävä jana $\{(x,y) : x = 0, -1 < y < 0\}$ on A:n osajoukko). Lisäksi pätee, että

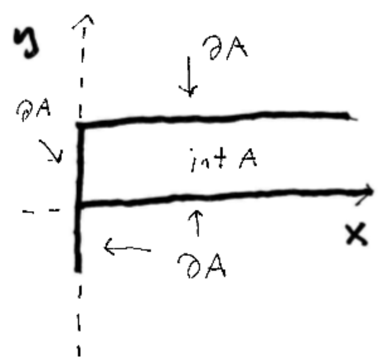
$$\begin{aligned} x \in \operatorname{int} A &\Leftrightarrow x \in A, x \notin \partial A \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus \partial A. \end{aligned}$$

Eli tämän ja Lauseen 8.3.(4) nojalla

$$\begin{aligned} \operatorname{int} A &= A \setminus \partial A, \\ \overline{A} &= A \cup \partial A, \end{aligned}$$

joten riittää määrittää reuna ∂A.





Kuvan perusteella nähdään, että reuna on

$$\begin{aligned} \partial A = &\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leq y \leq 1\} \\ &\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\} \\ &\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 1\}. \end{aligned}$$

3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$ osajoukko. Näytä:

(i) A on avoin X:ssä jos ja vain jos $A \cap \partial A = \emptyset$,

(ii) A on suljettu X:ssä jos ja vain jos $\partial A \subset A$.

Ratkaisu. Kohta (i): Oletetaan, että A on avoin. Lauseen 8.3 perusteella $A = \operatorname{int} A$. Määritelmästä seuraa toisaalta, että $\operatorname{int} A \cap \partial A = \emptyset$, joten $A \cap \partial A = \emptyset$.

Oletetaan $A \cap \partial A = \emptyset$ ja osoitetaan, että A on avoin. Olkoon $x \in A$. Nyt $x \notin \partial A$ ja $x \notin \operatorname{ext} A$, joten $x \in \operatorname{int} A$. Sisäpisteen määritelmän nojalla x:llä on avoin ympäristö $U \subset A$. A on siis avoin.

Kohta (ii): Oletetaan, että A on suljettu. Nyt A^c on avoin ja kohdan (i) sekä Lauseen 8.3.(6) nojalla

$$\emptyset = A^c \cap \partial(A^c) = A^c \cap \partial A.$$

Siis $\partial A \subset (A^c)^c = A$.

Oletetaan, että $\partial A \subset A$. Tämän ja Lauseen 8.3.(6) nojalla

$$\emptyset = A^c \cap \partial A = A^c \cap \partial(A^c).$$

Kohdan (i) nojalla A^c on avoin, jolloin siis A on suljettu.

4. (8:5) Olkoon (X, d) metrinen avarus ja $A \subset X$ osajoukko.

(i) Näytä, että $\partial(\partial A) \subset \partial A$.

(ii) Tarkista, että $\partial(\partial A) \neq \partial A$ kun $A = \mathbb{Q}$ (rationaaliluvut) ja $X = \mathbb{R}$. [Muistutus: luennoilla näytettiin, että reuna $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.]

Ratkaisu. Kohta (i): Lauseen 8.3.(5) nojalla ∂A on suljettu. Suljetun joukon sulkeuma on joukko itse (Lause 6.8.(4)). Lauseesta 8.3.(4) saadaan nyt, että

$$\partial A = \overline{\partial A} = \partial A \cup \partial(\partial A).$$

Erityisesti pätee siis, että $\partial(\partial A) \subset \partial A$.

Kohta (ii): Tiedetään, että $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ on avoin joukko, joten tehtävän 3 kohdan (i), nojalla

$$\emptyset = \mathbb{R} \cap \partial \mathbb{R} = \partial \mathbb{Q} \cap \partial(\partial \mathbb{Q}).$$

Siis $\partial \mathbb{Q} \neq \partial(\partial \mathbb{Q})$. Huomaa, myös että $\partial \mathbb{R} = \emptyset$.

5. Näytä, että $]0, \infty[\; \approx \; \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Etsitään jatkuva bijektio $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, jonka käänteiskuvaus on jatkuva. Valitaan $f(x) = \log x$. Analyysi I:n nojalla logaritmifunktio on jatkuva välillä $]0, \infty[$. Analyysi I:n tietojen avulla tiedeteään myös, että logaritmifunktio on aidosti monotoninen, joten se on injektio. Lisäksi pätee, että $\log x \to \infty$, kun $x \to \infty$ ja $\log x \to -\infty$, kun $x \to 0+$, josta seuraa, että logaritmifunktio on surjektio.

Analyysi I:n perusteella tiedetään myös, että eksponenttifunktio e^x on logaritmin jatkuva käänteiskuvaus. Kuvaus f on siis homeomorfismi.

6. Olkoon $|\cdot|_2$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ euklidinen normi ja $B(\overline{0}, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_2 < 1\}$ avoin origokeskinen kuula. Näytä, että kuvaus

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|_2}, \quad x \in B(\overline{0}, 1),$$

on homeomorfismi $B(\overline{0}, 1) \to \mathbb{R}^n$. (Käänteiskuvaus on

$$g(y) = \frac{y}{1 + |y|_2}, \quad y \in \mathbb{R}^n.)$$

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että kuvaukset f ja g ovat jatkuvia. Kuvakset voidaan hajoittaa esimerkikksi seuraavasti

$$\begin{aligned} f(x) &= (h_- \circ n)(x)\, x, \\ g(y) &= (h_+ \circ n)(y)\, y, \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} h_-(s) &:= \frac{1}{1 - s}, \quad h_- : [0, 1[\to \mathbb{R}, \\ h_+(s) &:= \frac{1}{1 + s}, \quad h_+ : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \\ n(x) &:= |x|_2, \quad n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kuvakset $h_\pm$ ovat Analyysi I:n nojalla jatkuvia. Kuvaus n on taas normi kuvaus ja siten jatkuva. Yhdistettykuvaus $h_\pm \circ n$ ovat siis jatkuvia. Lauseesta 5.3 seuraa nyt, että f ja g ovat jatkuvia.

Osoitetaan seuraavaksi, että f on injektio. Jokaiselle $x \in B(\overline{0}, 1)$ pätee, että

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= \frac{x}{1 - |x|_2} \left(1 + \left| \frac{x}{1 - |x|_2} \right|_2 \right)^{-1} \\
&= \frac{x}{1 - |x|_2} \left(1 + \frac{|x|_2}{1 - |x|_2} \right)^{-1} \\
&= \frac{x}{1 - |x|_2} \left(\frac{1}{1 - |x|_2} \right)^{-1} \\
&= x.
\end{aligned}$$

Jos siis $f(x) = f(x')$, niin

$$x = (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') = x'.$$

Kuvaus f on siis injektio.

Osoitetaan lopuksi, että f on surjektio. Jokaiselle $y \in \mathbb{R}^n$ pätee, että

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(y) &= \frac{y}{1 + |y|_2} \left(1 - \left| \frac{y}{1 + |y|_2} \right|_2 \right)^{-1} \\
&= \frac{y}{1 + |y|_2} \left(1 - \frac{|y|_2}{1 + |y|_2} \right)^{-1} \\
&= \frac{y}{1 + |y|_2} \left(\frac{1}{1 + |y|_2} \right)^{-1} \\
&= y.
\end{aligned}$$

Eli jos $y \in \mathbb{R}^n$, niin valitsemalla $x = g(y)$, saadaan alkio x jolle $f(x) = y$. Kuvaus f on siis surjektio.

(Huomaa myös, että yllä olevien laskujen avulla voidaan osoittaa, että g on kuvauksen f käänteiskuvaus.)