Topologia I
Harjoitus 7
Viikko 12 (18.3.-22.3. 2013)

1. (7:2 versio) Olkoon $\overline{B}(\overline{0},1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Tutki seuraavista joukoista A, mitkä niistä ovat avoimia tai suljettuja joukon $\overline{B}(\overline{0},1)$ relatiivitopologiassa:
(i) $A = \{(x,y) \in \overline{B}(\overline{0},1) : xy > 0\}$,
(ii) $A = \{(x,y) \in \overline{B}(\overline{0},1) : x \geq 0\}$.

2. (8:2) Olkoon $X = \mathbb{R}^2$ ja $A = \{(x,y) : xy \geq 0, x \geq 0, |y| < 1\}$. Määritä joukot $int(A)$, ∂A ja $\overline{A}$. Ratkaisussa voit nojautua sopiviin kuviin.

3. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $A \subset X$ osajoukko. Näytä:
(i) A on avoin X:ssä jos ja vain jos $A \cap \partial A = \emptyset$,
(ii) A on suljettu X:ssä jos ja vain jos $\partial A \subset A$.

4. (8:5) Olkoon (X,d) metrinen avarus ja $A \subset X$ osajoukko.
(i) Näytä, että $\partial(\partial A) \subset \partial A$. *Vihje:* Lause 8.3.(5) tai (4).
(ii) Tarkista, että $\partial(\partial A) \neq \partial A$ kun $A = \mathbb{Q}$ (rationaaliluvut) ja $X = \mathbb{R}$. [Muistutus: luennoilla näytettiin, että reuna $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.]

5. Näytä, että $]0,\infty[\approx \mathbb{R}$.

6. Olkoon $|\cdot|_2$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ euklidinen metriikka ja $B(\overline{0},1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_2 < 1\}$ avoin origokeskinen kuula. Näytä, että kuvaus

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|_2}, \quad x \in B(\overline{0},1),$$

on homeomorfismi $B(\overline{0},1) \to \mathbb{R}^n$. (Käänteiskuvaus on

$$g(y) = \frac{y}{1 + |y|_2}, \quad y \in \mathbb{R}^n.)$$