Topologia I
Harjoitus 6
Viikko 11 (11.3.-15.3. 2013)

1. Olkoon $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$. Määritä joukon A kasautumispisteet ja sulkeuma $\overline{A}$, kun joukossa $\mathbf{R}$ on diskreetti $\{0,1\}$-metriikka (Väisälä, Esim. 2.5.2).

2. (6:14 osa) Määritä joukon A kasautumispisteet tasossa $\mathbf{R}^2$, kun (i) $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, (ii) $A = \mathbf{Q} \times \mathbf{Z}$. Edellä $\mathbf{Z}$ on kokonaislukujen joukko, ja $\mathbf{Q}$ rationaalilukujen joukko.

3. Olkoon E sisätuloavaruus ja $A \subset E$ epätyhjä osajoukko. Näytä, että ortokomplementti

$$A^{\perp} = \{y \in E : y \cdot x = 0 \text{ kaikilla } x \in A\}$$

on suljettu joukko E:ssä. *Apu:* $A^{\perp} = \cap_{x \in A} f_x^{-1}(\{0\})$, missä $f_x(y) = y \cdot x$ kun $y \in E$. Muista että jokainen kuvaus f_x on jatkuva (HT 4:3).

4. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $A \subset X$ joukko ja $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$ sen komplementtijoukko. Näytä: A on avoin X:ssä jos ja vain jos etäisyys $r(x) = d(x, A^c) > 0$ kaikilla $x \in A$. *Vihje:* jos $r(x) > 0$, niin avoin kuula $B(x, r(x)) \subset A$. (Piirrä kuva!)

5. Olkoon E sisätuloavaruus, ja $u \cdot v$ on sisätulo kun $u, v \in E$. Näytä: jos f ja g ovat jatkuvia kuvauksia $E \to E$, niin kuvaus

$$f \cdot g : E \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x), \quad x \in E,$$

on jatkuva avaruudessa E. *Vihje:* tarkista ensin että $4u \cdot v = |u+v|^2 - |u-v|^2$ kun $u, v \in E$, sekä käytä luvun 5 jatkuvuustuloksia.

6. (6:12 variaatio) Olkoon $f, g : X \to Y$ jatkuvia kuvauksia, missä X ja Y ovat metrisiä avaruuksia. Osoita: (i) joukko

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

on suljettu X:ssä.
(ii) Jos $B \subset X$ on sellainen osajoukko, että rajoittumille pätee $f_{|B} = g_{|B}$, niin myös $f_{|\overline{B}} = g_{|\overline{B}}$.
Vihje: jos $x \in A^c$ niin etsi jatkuvuuden nojalla sellainen avoin kuula $B(x, r)$, että $f(B(x, r)) \cap g(B(x, r)) = \emptyset$.

Muistutus: 2. periodin luennot alkavat ma 11.3. Viikolla 11.3. - 15.3. on laskuharjoituksia (harjoitus 6).