Topologia I
Harjoitus 5
Viikko 8 (18.2.-22.2. 2013)
Ratkaisuehdotuksia, Henrik Wirzenius

1. (6:1 osa) Onko joukko $A \subset \mathbb{R}^2$ suljettu (euklidisessa metriikassa), kun (i) $A = \{(x,y) : x < 1\}$, (ii) $A = \{(x,y) : x \neq 0, |y| \leq |x|\}$? Määritä sulkeuma $\overline{A}$, jos A ei ole suljettu joukko.

Ratkaisu: (i) Määritetään sulkeuma $\overline{A}$. Olkoon $B = \{(x,y) : x \leq 1\}$. Osoitetaan, että $\overline{A} = B$. Ensinnäkin

$$B^c = \{(x,y) : x > 1\} = \mathrm{pr}_1^{-1}\,]1,+\infty[,$$

on avoin lauseen 4.8. nojalla, sillä pr_1 on jatkuva lauseen 5.6. nojalla ja $]1,+\infty[$ on avoin joukko. Siis B on suljettu. Koska $A \subset B$, tästä seuraa lauseen 6.8. (3) nojalla, että $\overline{A} \subset B$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $B \subset \overline{A}$. Olkoon $(x,y) \in B$. Tällöin kaikilla $r > 0$ pätee $(x - r/2, y) \in B((x,y),r)$, sillä

$$d((x-r/2,y),(x,y)) = |(x-r/2,y)-(x,y)| = \sqrt{(x-r/2-x)^2+(y-y)^2} = r/2 < r.$$

Myös $(x-r/2,y) \in A$, sillä $x-r/2 \leq 1-r/2 < 1$. Näin ollen $B((x,y),r) \cap A \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$, joten $(x,y) \in \overline{A}$. Tästä seuraa, että $B \subset \overline{A}$. Siis $\overline{A} = B$, eli

$$\overline{A} = \{(x,y) : x \leq 1\}.$$

Koska $A \neq \overline{A}$, niin A ei ole suljettu lauseen 6.8. (6) nojalla.

(ii) Määritetään sulkeuma $\overline{A}$. Olkoon $B = A \cup \{(0,0)\} = \{(x,y) : |y| \leq |x|\}$. Osoitetaan, että $\overline{A} = B$. Huomataan, että

$$B^c = \{(x,y) : |y| > |x|\} = \{(x,y) : |x| - |y| < 0\} = f^{-1}\,]-\infty,0[,$$

missä $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = |x| - |y|$. Osoitetaan, että f on jatkuva. Analyysi I nojalla (tai sovelluksen 4.6. nojalla) itseisarvo $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n(x) = |x|$ on jatkuva, joten $n \circ \mathrm{pr}_1$ ja $n \circ \mathrm{pr}_2$ ovat jatkuvia funktioita lauseiden 4.12. ja 5.6. nojalla. Tällöin myös $f = n \circ \mathrm{pr}_1 - n \circ \mathrm{pr}_2$ on jatkuva esimerkin 5.4.2. nojalla. Nyt, koska f on jatkuva ja $]-\infty,0[$ on avoin joukko, niin lauseen 4.8. nojalla

B^c on avoin. Siis B on suljettu. Koska $A \subset B$, tästä seuraa lauseen 6.8. (3) nojalla, että $\overline{A} \subset B$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $B \subset \overline{A}$. Lauseen 6.8. (1) nojalla $A \subset \overline{A}$. Myös $(0,0) \in \overline{A}$ sillä kaikilla $r > 0$ pätee $(r/2, 0) \in B((0,0), r)$ ja $(r/2, 0) \in A$, joten $B((0,0), r) \cap A \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$. Näin ollen $B \subset \overline{A}$. Siis $\overline{A} = B$, eli

$$\overline{A} = \{(x, y) : |y| \leq |x|\}.$$

Koska $A \neq \overline{A}$, niin A ei ole suljettu lauseen 6.8. (6) nojalla.

2. (5:2) Näytä, että joukko

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 1 < xyz < \sin(1 + y)\}$$

on avoin avaruuden $\mathbb{R}^3$ euklidisessa metriikassa. *Apu:* alkukuvaehto (Väisälä 4.8).

Ratkaisu: Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f((x, y, z)) = x^2 - 1 - xyz$ ja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g((x, y, z)) = \sin(1 + y) - xyz$. Tällöin

$$\begin{aligned}
A &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 1 < xyz < \sin(1 + y)\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 1 - xyz < 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sin(1 + y) - xyz > 0\} \\
&= f^{-1}]-\infty, 0[\cap g^{-1}]0, +\infty[.
\end{aligned}$$

Koska $]-\infty, 0[$ ja $]0, +\infty[$ ovat avoimia joukkoja, riittää lauseiden 3.5. ja 4.8. nojalla osoittaa, että f ja g ovat jatkuvia funktioita.

Määritellään seuraavat apufunktiot: $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sin(1 + x)$, $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = x^2 - 1$ ja $m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $m((x, y, z)) = xyz$. Analyysi I:n nojalla h ja k ovat jatkuvia. Tällöin myös funktiot $h \circ \mathrm{pr}_2$ ja $k \circ \mathrm{pr}_1$ ovat jatkuvia lauseiden 4.12. ja 5.6. nojalla. Huomataan myös että $m = \mathrm{pr}_1\mathrm{pr}_2\mathrm{pr}_3$ (kts. funktioiden tulon määritelmä 5.1), joten m on jatkuva lauseiden 5.3. ja 5.6. nojalla. Näin ollen $f = k \circ \mathrm{pr}_1 - m$ ja $g = h \circ \mathrm{pr}_2 - m$ ovat jatkuvia esimerkin 5.4.2. nojalla. Kuten yllä mainittiin, tästä seuraa, että A on avoin.

3. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ ja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 2\}$. Näytä: (i) A ja B ovat suljettuja joukkoja, ja $A \cap B = \emptyset$, (ii) etäisyys $d(A, B) = 0$.

Ratkaisu: (i) Osoitetaan, että komplementit $A^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 1\}$ ja

$B^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 2\}$ ovat avoimia joukkoja. Samanlainen päättely kuten edellisen tehtävän funktiolle m osoittaa, että $\hat{m} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\hat{m}((x,y)) = xy$ on jatkuva. Edelleen, huomataan, että

$$\begin{aligned} A^c &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\} \\ &= \hat{m}^{-1}]1,+\infty[\cup \hat{m}^{-1}]-\infty,1[. \end{aligned}$$

Koska $\hat{m}$ on jatkuva, ja $]1,+\infty[$ ja $]-\infty,1[$ ovat avoimia, niin lauseiden 3.4. ja 4.8. nojalla A^c on avoin. Siis A on suljettu.

Samoin

$$\begin{aligned} B^c &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 2\} \\ &= \hat{m}^{-1}]2,+\infty[\cup \hat{m}^{-1}]-\infty,2[, \end{aligned}$$

joten, koska $\hat{m}$ on jatkuva, ja $]2,+\infty[$ ja $]-\infty,2[$ ovat avoimia, niin lauseiden 3.4. ja 4.8. nojalla B^c on avoin. Siis B on suljettu.

Vaihtoehtoinen ratkaisu: Huomataan, että $A = \hat{m}^{-1}\{1\}$ ja $B = \hat{m}^{-1}\{2\}$. Koska joukot $\{1\}$ ja $\{2\}$ ovat suljettuja ovat A ja B suljettuja funktion $\hat{m}$ jatkuvuuden sekä lauseen 6.13. nojalla.

Osoitetaan seuraavaksi, että $A \cap B = \emptyset$. Jos $(x,y) \in A$ niin $xy = 1$. Tällöin $xy \neq 2$, joten $(x,y) \notin B$. Näin ollen $A \cap B = \emptyset$.

(ii) Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $x > 0$ jolle $\frac{1}{x} < \varepsilon$. Tällöin $(x, \frac{1}{x}) \in A$ ja $(x, \frac{2}{x}) \in B$. Näin ollen

$$0 \leq d(A,B) \leq d\big((x,\frac{1}{x}),(x,\frac{2}{x})\big) = |(x-x, \frac{1}{x} - \frac{2}{x})| = |(0, -\frac{1}{x})| = \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Näin ollen $d(A,B) = 0$.

4. (6:2) Olkoot $\mathbb{Q}$ rationaalilukujen ja $\mathbb{Q}^c$ irrationaalilukujen joukot. Näytä, että sulkeumat $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ sekä $\overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$ (tavallisen metriikan suhteen). *Muistutus:* (Analyysi I) jos $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ ovat mielivaltaisia reaalilukuja, niin on olemassa $q \in \mathbb{Q}$ sekä $r \in \mathbb{Q}^c$ joille $x < q < y$ ja $x < r < y$.

Ratkaisu: Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Analyysi I:n nojalla kaikilla $s > 0$ on olemassa $q \in \mathbb{Q}$ jolle $x < q < x + s$. Eli $B(x, s) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ kaikilla $s > 0$. Näin ollen $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, joten $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Samoin Analyysi I:n nojalla kaikilla $s > 0$ on olemassa $r \in \mathbb{Q}^c$ jolle $x < r < x + s$. Eli $B(x, s) \cap \mathbb{Q}^c \neq \emptyset$ kaikilla $s > 0$. Näin ollen $x \in \overline{\mathbb{Q}^c}$, joten $\overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$.

5. (6:5) Olkoot A ja B suljettuja joukkoja $\mathbb{R}$:ssä. Osoita, että karteesinen tulojoukko $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ on suljettu tasossa $\mathbb{R}^2$. *Muistutus:* alkukuvaehto suljetuille joukoille (Väisälä 6.13).

Ratkaisu: Huomataan, että

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) : x \in A, y \in B\} \\ &= \{(x, y) : x \in A, y \in \mathbb{R}\} \cap \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in B\} \\ &= \{(x, y) : \operatorname{pr}_1((x, y)) \in A\} \cap \{(x, y) : \operatorname{pr}_2((x, y)) \in B\} \\ &= \operatorname{pr}_1^{-1} A \cap \operatorname{pr}_2^{-1} B. \end{aligned}$$

Koska projektiot pr_1 ja pr_2 ovat jatkuvia lauseen 5.6. nojalla, niin joukot $\operatorname{pr}_1^{-1} A$ ja $\operatorname{pr}_2^{-1} B$ ovat suljettuja lauseen 6.13. nojalla. Näin ollen $A \times B$ on suljettu lauseen 6.3. (I) nojalla.

6. (6:18 ja 6:19) Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita:

(i) jos $F \subset X$ on suljettu joukko, niin $F = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$, missä $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ ja jokainen U_n on avoin joukko X:ssä.

(ii) jos $U \subset X$ on avoin joukko, niin $U = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, missä $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ ja jokainen F_n on suljettu joukko X:ssä.

Vihje: Valitse $U_n = \{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\}$ kun $n \in \mathbb{N}$. Tapauksessa (ii) siirry komplementtijoukkoihin.

Ratkaisu: (i) Oletetaan, että $F \subset X$ on suljettu joukko. Jos $F = \emptyset$, niin voidaan valita $U_n = \emptyset$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ (muista, että $\emptyset$ on sekä avoin että suljettu).

Oletetaan seuraavaksi, että $F \neq \emptyset$. Käytetään vihjettä ja valitaan $U_n = \{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\}$ kun $n \in \mathbb{N}$. Huomataan, että

$$U_n = \{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\} = f^{-1}]-\infty, \frac{1}{n}[,$$

missä $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, F)$. Sovelluksen 4.6. nojalla f on jatkuva, ja koska $]-\infty, \frac{1}{n}[$ on avoin kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin U_n on avoin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ lauseen 4.8. nojalla. Selvästi pätee myös $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ Osoitetaan lopuksi, että $F = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$.

Olkoon $x \in F$. Tällöin $d(x, F) = 0$, joten $x \in U_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Näin ollen $x \in \cap_{n=1}^{\infty} U_n$, josta seuraa, että $F \subset \cap_{n=1}^{\infty} U_n$.

Olkoon $x \in \cap_{n=1}^{\infty} U_n$. Tällöin $d(x, F) < \frac{1}{n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska $\frac{1}{n} \to 0$ kun $n \to \infty$, niin $d(x, F) \leq 0$. Toisaalta, $d(x, F) \geq 0$ kaikilla $x \in X$, joten $d(x, F) = 0$. Koska F on suljettu, niin lauseen 6.8. (6) nojalla $F = \overline{F}$. Näin ollen $x \in F$ lauseen 6.11. nojalla, josta seuraa, että $\cap_{n=1}^{\infty} U_n \subset F$. Siis $F = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$.

(ii) Oletetaan, että $U \subset X$ on avoin joukko. Tällöin U^c on suljettu, joten (i)-kohdan nojalla on olemassa avoimet joukot U_n, $n \in \mathbb{N}$ joille pätee $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ ja $U^c = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$. Tällöin U_n^c on suljettu kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi $U_1^c \subset U_2^c \subset \ldots$ ja De Morganin lakien (0.4.) nojalla

$$U = U^{cc} = \big(\cap_{n=1}^{\infty} U_n \big)^c = \cup_{n=1}^{\infty} U_n^c.$$

Muistutus: Kurssin ensimmäinen kurssikoe on tiistaina 26.2 klo 13-15. Kurssikokeessa saa olla mukana A4:n kokoinen muistilappu (= 1 sivu!). Ilmoita luennoijalle sähköpostitse jos kyseinen aika ei sovi esteen takia (korvaava koetilaisuus järjestetään tarvittaessa).
Koealue: monisteen luvut 0 - 6 (sivut 6 - 53) Kertausta ja vanhoja koetehtäviä ke 20.2. noin klo 11 - 12.
Kurssin 2. periodi alkaa ma 11.3. Laskuharjoitus 6 on viikolla 11 (11.3. - 15.3.). Tehtävät ilmestyvät kotisivulle viikolla 10 torstaina 7.3. mennessä.