

Topologia I

Harjoitus 5

Viikko 8 (18.2.-22.2. 2013)

1. (6:1 osa) Onko joukko $A \subset \mathbb{R}^2$ suljettu (euklidisessa metriikassa), kun (i) $A = \{(x, y) : x < 1\}$, (ii) $A = \{(x, y) : x \neq 0, |y| \leq |x|\}$? Määritä sulkeuma \overline{A} , jos A ei ole suljettu joukko.

2. (5:2) Näytä, että joukko

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 1 < xyz < \sin(1 + y)\}$$

on avoin avaruuden \mathbb{R}^3 euklidisessa metriikassa. *Apu:* alkukuvaehto (Väisälä 4.8).

3. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ ja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 2\}$. Näytä: (i) A ja B ovat suljettuja joukkoja, ja $A \cap B = \emptyset$, (ii) etäisyys $d(A, B) = 0$.

4. (6:2) Olkoot \mathbb{Q} rationaalilukujen ja \mathbb{Q}^c irrationaalilukujen joukot. Näytä, että sulkeumat $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ sekä $\overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$ (tavallisen metriikan suhteen). *Muistutus:* (Analyysi I) jos $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ ovat mielivaltaisia reaalilukuja, niin on olemassa $q \in \mathbb{Q}$ sekä $r \in \mathbb{Q}^c$ joille $x < q < y$ ja $x < r < y$.

5. (6:5) Olkoot A ja B suljettuja joukkoja \mathbb{R} :ssä. Osoita, että karteesinen tulojoukko $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ on suljettu tasossa \mathbb{R}^2 . *Muistutus:* alkukuvaehto suljetuille joukoille (Väisälä 6.13).

6. (6:18 ja 6:19) Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita:

(i) jos $F \subset X$ on suljettu joukko, niin $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, missä $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ ja jokainen U_n on avoin joukko X :ssä.

(ii) jos $U \subset X$ on avoin joukko, niin $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, missä $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ ja jokainen F_n on suljettu joukko X :ssä.

Vihje: Valitse $U_n = \{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\}$ kun $n \in \mathbb{N}$. Tapauksessa (ii) siirry komplementtjoukkoihin.

Muistutus: Kurssin ensimmäinen kurssikoe on tiistaina 26.2 klo 13-15. Kurssikokeessa saa olla mukana A4:n kokoinen muistilappu (= 1 sivu!). Ilmoita luennoijalle sähköpostitse jos kyseinen aika ei sovi esteen takia (korvaava koetilaisuus järjestetään tarvittaessa).

Koelue: monisteen luvut 0 - 6 (sivut 6 - 53) Kertausta ja vanhoja koetehtäviä ke 20.2. noin klo 11 - 12.

Kurssin 2. periodi alkaa ma 11.3. Laskuharjoitus 6 on viikolla 11 (11.3. - 15.3.). Tehtävät ilmestyvät kotisivulle viikolla 10 torstaina 7.3. mennessä.