Topologia I
Harjoitus 4
Viikko 7 (11.2.-15.2. 2013)
Ratkaisuehdotuksia
Teemu Saksala, teemu.saksala@helsinki.fi

1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaus $f(x) = x^3 + \sin(x)$, kun $x \in \mathbb{R}$. Etsi väliarvolauseen avulla sellainen vakio $M \geq 0$, että f on M-Lipschitz kuvaus välillä $[0, 2]$.

Ratkaisu Kuvauksen f määritelmästä nähdään, että se on derivoituva koko joukossa $\mathbb{R}$. Tällöin se on myös jatkuva koko reaalisuoralla. Tutkitaan kuvauksen f derivaattaa pisteessä $x \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee, että

$$f'(x) = 3x^2 + \cos(x).$$

Jos piste x kuuluu suljetulle välille $[0, 2]$, niin derivaatalle tässä pisteessä pätee, että

$$|f'(x)| = |3x^2 + \cos(x)| \leq 3x^2 + |\cos(x)| \leq 3x^2 + 1 \leq 3 \cdot 2^2 + 1 = 13.$$

Olkoot $x, y \in [0, 2]$, $x < y$. Koska kuvaus f on derivoituva koko joukossa $\mathbb{R}$, niin se on jatkuva suljetulla välillä $[x, y]$ ja derivoituva avoimella välillä $]x, y[$. Tällöin voimme soveltaa väliarvolausetta välillä $[x, y]$. Tämän lauseen nojalla on olemassa sellainen luku $\xi \in]y, x[$, jolle pätee

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y|.$$

Koska luku ξ on myös välin $[0, 2]$ piste, niin erityisesti pätee seuraavaa

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq 13|x - y|.$$

Tämä osoittaa, että kuvaus f on 13-Lipschitz.

2. (4:5) Olkoon $f : X \to Y$ M-Lipschitz ja $g : Y \to Z$ M'-Lipschitz. Tarkista, että yhdistetty kuvaus $g \circ f : X \to Z$ on MM'-Lipschitz.

Ratkaisu Olkoot $x, y \in X$. Merkitään avaruuksien X, Y ja Z metriikoita symboleille d_X, d_Y ja d_Z. Kuvausten f ja g Lipschitz-ominaisuuksien nojalla pätee, että

$$d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) = d_Z(g(f(x)), g(f(y))) \leq M' d_Y(f(x), f(y)) \leq M' M d_X(x, y).$$

Siis yhdistetty kuvaus $g \circ f$ on $M'M$-Lipschitz.

3. (4:8) Olkoon $f(0,0) = 0$ ja $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ kun $(x,y) \neq (0,0)$. Näytä, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on epäjatkuva origossa $(0,0)$, mutta että f:n rajoittuma jokaiselle origon kautta kulkevalle suoralle on jatkuva origossa.

Ratkaisu Jotta kuvaus f olisi jatkuva origossa, tulisi meidän näyttää, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että pätee

$$f(B_{\mathbb{R}^2}((0,0),\delta)) \subset B_{\mathbb{R}}(0,\epsilon). \tag{1}$$

Näin ei kuitenkaan tässä tapauksessa ole, sillä kaikilla $x > 0$ pätee

$$f(x,\sqrt{x}) = \frac{x(\sqrt{x})^2}{x^2 + (\sqrt{x})^4} = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2},$$

jolloin

$$f(x,\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \notin \,]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[\, = B_{\mathbb{R}}\Big(0,\frac{1}{4}\Big), \text{ vaikka } (x,\sqrt{x}) \overset{x\to 0_+}{\longrightarrow} (0,0).$$

Siis ei voida löytää sellaista positiivista lukua δ, että kaavan (1) ehto toteutuisi luvun ϵ ollessa $\frac{1}{4}$.

Tutkitaan sitten tapausta, jossa kuvaus f rajoitetaan origon kautta kulkevalle suoralle. Olkoon S jokin tällainen suora ja $f_S : S \to \mathbb{R}$ se kuvaus, jolle pätee $f|_S(x,y) = f_S(x,y)$. Tutkitaan jatkuvuutta tapauksittain.

1. Jos suora S on y-akseli, eli $x = 0$, niin tällöin pätee, että

$$f_S(0,y) = \frac{0 \cdot y^2}{0^2 + y^4} = 0.$$

   Tässä tapauksessa f_S on siis vakiokuvaus 0, missä f_S on yhden muuttujan kuvaus. Väisälän kirjan sivulla 35 olleen esimerkin 4.2.2. nojalla (tai Analyysi I:n nojalla) vakiokuvaukset ovat jatkuvia koko lähtöavaruudessaan. Erityisesti f_S on jatkuva origossa.

2. Olkoon S sellainen suora, joka toteuttaa yhtälön $y = cx$, jollakin $c \in \mathbb{R}$. Koska kaikilla näillä suorilla y-koordinaatti voidaan ilmaista yksikäsitteisellä tavalla x-koordinaatin avulla, niin $f_S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tällöin kuvauksen f_S lauseke on muotoa

$$f_S(x) = f(x,cx) = \frac{c^2x^3}{x^2 + c^4x^4} = \frac{c^2x}{1 + c^4x^2}.$$

Tämä on rationaalifunktio, joka on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä (koska $1+c^4x^2 \geq 1$ kaikilla x) kurssin Analyysi I nojalla.

4. (5:4) Olkoon E sisätuloavaruus, $a \in E$ ja $f(x) = x \cdot a$, kun $x \in E$. Tarkista, että kuvaus $f : E \to \mathbb{R}$ on Lipschitz, ja siten jatkuva E:ssä.

Ratkaisu Olkoon $|\cdot|$ sisätulon $\cdot$ määräämä normi. Olkoot $x, y \in E$. Koska sisätulo on lineaarinen molempien koordinaattien suhteen, niin pätee

$$|f(x) - f(y)| = |x \cdot a - y \cdot a| = |(x - y) \cdot a|.$$

Sovelletaan viimeiseen termiin Schwarzin epäyhtälöä, jolloin pätee

$$|f(x) - f(y)| \leq |a||x - y|.$$

Siis f on $|a|$-Lipschitz.

5. Olkoon $(E, |\cdot|)$ normiavaruus. Näytä, että joukko

$$A = \{x \in E : \frac{1}{3} < e^{-|x|^2} < \frac{1}{2}\}.$$

on avoin E:ssä.

Ratkaisu Muokataan tehtävänannossa annettua joukkoa A.

$$A = \{x \in E : \frac{1}{3} < e^{-|x|^2} < \frac{1}{2}\} = \{x \in E : e^{-|x|^2} \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[\ \}.$$

Olkoot $n : E \to \mathbb{R}, n(x) = |x|$ ja $g, h, \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = -x$ ja $\exp(x) = e^x$. Merkitään $f : E \to \mathbb{R}$, $f = \exp \circ h \circ g \circ n$. Tällöin joukko A voidaan kirjoittaa kuvauksen f avulla muodosa

$$A = \{x \in E : f(x) \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[\ \} = f^{-1}]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[.$$

Koska avaruuden $\mathbb{R}$ avoimet välit ovat avoimia, riittää Väisälän Lauseen 4.8. nojalla osoittaa, että kuvaus f on jatkuva. Toisaalta kirjan lauseen 4.12. nojalla jatkuvien kuvausten yhdiste on jatkuva. Näin ollen riittää todistaa, että kuvaukset n, g, h ja exp ovat jatkuvia. Analyysi I:ssä on osoitettu, että polynomit ja eksponenttifunktio ovat jatkuvia, silloin g ja exp ovat jatkuvia. Toisaalta kirjan lauseen 5.3. nojalla h on jatkuva.

Lopuksi, normikuvaus $x \mapsto n(x) = |x|$ on jatkuva Väisälän kohtien 4.6 ja 2.10 nojalla: normikuvaus on 1-lipschitz

$$| \, |x| - |y| \, | \leq |x - y|, \quad x, y \in E,$$

ja siten jatkuva (Väisälä, 4.5).

Vaihtoehtoinen suora argumentti: olkoon $x \in E$. Jos U on pisteen $n(x)$ ympäristö, niin se sisältää jonkin avoimen välin $]n(x) - r, n(x) + r[$, $r > 0$. Merkitään tätä avointa väliä symbolilla Δ. Tällöin

$$n^{-1}\Delta = \{y \in E : n(x) - r < |y| < n(x) + r\}.$$

Osoitetaan, että $B(x, \frac{r}{2}) \subset n^{-1}\Delta$. Jos $y \in B(x, \frac{r}{2})$, niin pätee, että

$$|y| \leq |y - x| + |x| \leq \frac{r}{2} + n(x) < r + n(x)$$

$$\text{ja } |x| \leq |x - y| + |y|, \text{ jolloin } |y| \geq |x| - |x - y| = n(x) - \frac{r}{2} > n(x) - r.$$

Siis $y \in n^{-1}\Delta$. Koska kuula $B(x, \frac{r}{2})$ on pisteen x ympäristö, joka sisältyy joukkoon $n^{-1}\Delta$, niin se sisältyy myös joukkoon $n^{-1}U$. Kirjan lauseen 4.7. nojalla n on jatkuva.

6. (3.11) Olkoon (X, d) metrinen avaruus, missä X on äärellinen joukko. Näytä, että (X, d) on diskreetti avaruus, ts. jokainen piste $x \in X$ on erakkopiste.

Ratkaisu Olkoon $x \in X$. Jos $y \in X$, $y \neq x$, niin metriikan määritelmän nojalla pätee $d(x, y) > 0$. Koska joukko X on äärellinen niin luku

$$c = \min_{y \in X, y \neq x} d(x, y)$$

on olemassa ja aidosti nollaa suurempi. Tällöin kuula $B(x, \frac{c}{2})$ ei kohtaa mitään muuta avaruuden X pistettä kuin keskipisteensä. Siis x on erakkopiste. Koska x oli mielivaltainen, niin kaikkien avaruuden X pisteiden on oltava erakkopisteitä. Siis X on diskreetti.