Topologia I
Harjoitus 4
Viikko 7 (11.2.-15.2. 2013)

1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaus $f(x) = x^3 + \sin(x)$, kun $x \in \mathbb{R}$. Etsi väliarvolauseen avulla sellainen vakio $M \geq 0$, että f on M-Lipschitz kuvaus välillä $[0, 2]$.

2. (4:5) Olkoon $f : X \to Y$ M-Lipschitz ja $g : Y \to Z$ M'-Lipschitz. Tarkista, että yhdistetty kuvaus $g \circ f : X \to Z$ on MM'-Lipschitz.

3. (4:8) Olkoon $f(0, 0) = 0$ ja $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ kun $(x, y) \neq (0, 0)$. Näytä, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on epäjatkuva origossa $(0, 0)$, mutta että f:n rajoittuma jokaiselle origon kautta kulkevalle suoralle on jatkuva origossa. [Origon kautta kulkeva suora on muotoa $x = 0$ tai $y = cx$, missä $c \in \mathbb{R}$.]

4. (5:4) Olkoon E sisätuloavaruus, $a \in E$ ja $f(x) = x \cdot a$, kun $x \in E$. Tarkista, että kuvaus $f : E \to \mathbb{R}$ on Lipschitz, ja siten jatkuva E:ssä.

5. Olkoon $(E, |\cdot|)$ normiavaruus. Näytä, että joukko

$$A = \{x \in E : \frac{1}{3} < e^{-|x|^2} < \frac{1}{2}\}.$$

on avoin E:ssä. *Apu.* Jatkuvuuden alkukuvaehto sopivalle yhdistetylle kuvaukselle (Väisälä, Lauseet 4.8 ja 4.12).

6. (3.11) Olkoon (X, d) metrinen avaruus, missä X on äärellinen joukko. Näytä, että (X, d) on diskreetti avaruus, ts. jokainen piste $x \in X$ on erakkopiste. *Ohje:*

$$c = \min_{x,y \in X, x \neq y} d(x, y) > 0$$

(perustele miksi).

Muistutus: Kurssin ensimmäinen kurssikoe on tiistaina 26.2.2013 klo 13-15. Ilmoita luennoijalle jos kyseinen aika ei sovi ylivoimaisen esteen takia (vaihtoehtoinen koetilaisuus järjestetään tarvittaessa).

Kurssikokeessa saa olla mukana A4:n kokoinen muistilappu (= 1 sivu!).