Topologia I, Harjoitus 3
Viikko 5 (4.2.-8.2. 2013)
Ratkaisuehdotuksia, Heikki Koivupalo

1. Olkoon $A_t = [t, 2t] = \{x \in \mathbb{R} : t \leq x \leq 2t\}$ kaikilla $t > 0$. Määrää $\bigcup_{t>0} A_t$ ja $\bigcap_{t>0} A_t$.

Ratkaisu. Osoitetaan, että

$$\bigcup_{t>0} A_t =]0, \infty[.$$

Huomataan aluksi, että $A_t \subset]0, \infty[$ kaikilla $t > 0$, joten $\bigcup_{t>0} A_t \subset]0, \infty[$. Oletetaan sitten, että $x \in]0, \infty[$. Nyt $x \in A_x$ ja edelleen $x \in \bigcup_{t>0} A_t$. Siis $]0, \infty[\subset \bigcup_{t>0} A_t$.

Osoitetaan seuraavaksi, että

$$\bigcap_{t>0} A_t = \emptyset.$$

Riittää näyttää, että $A_t \cap A'_t$ joillakin leikkauksen joukoilla A_t, A'_t. Nyt $A_1 \cap A_3 = [1, 2] \cap [3, 6] = \emptyset$.

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $a \in X$, $B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$ avoin kuula sekä $\overline{B}(a, r)$ vastaava suljettu kuula, kun $r > 0$. Näytä, että

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B(a, 1 + 1/n) = \overline{B}(a, 1).$$

Ratkaisu. Heti huomataan, että $\overline{B}(a, 1) \subset B(a, 1 + 1/n)$ kaikilla $n > 0$. On siis oltava $\overline{B}(a, 1) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B(a, 1 + 1/n)$.

Olkoon sitten $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(a, 1 + 1/n)$. Tällöin $x \in B(a, 1 + 1/n)$ kaikilla $n > 0$. Jos olisi $x \notin \overline{B}(a, 1)$, niin $d(a, x) \geq 1 + \epsilon$ jollain $\epsilon > 0$. Tällöin jos $n > 1/\epsilon$, niin $d(a, x) < 1 + 1/n < 1 + \epsilon$, mikä on ristiriidassa aikaisemman oletuksen kanssa. On siis oltava $x \in \overline{B}(a, 1)$.

3. Tutki onko A avoin joukko tason $\mathbf{R}^2$ euklidisessa metriikassa, kun

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0\}.$$

Ratkaisu. Selvästikin y-akselin pisteet ovat epäilyttäviä. Osoitetaan, että A ei ole avoin. Olkoon $x = (0,0)$ ja $r > 0$ mielivaltainen. Nyt $(-r/2, 0) \in B(x,r)$. Näin ollen $B(x,r) \not\subset A$ kaikilla $r > 0$. Siis A ei ole avoin.

4. Näytä, että

$$B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

on tason $\mathbf{R}^2$ avoin joukko euklidisessa metriikassa.

Ratkaisu. Olkoon $(x,y) \in B$. Näytetään, että on olemassa $r > 0$, jolla $B((x,y),r) \subset B$. Olkoon $r = \min\{x,y\}$ ja $(x',y') \in B((x,y),r)$. Riittää näyttää, että x' ja y' ovat positiivisia. Nyt

$$|x'-x| = \sqrt{(x'-x)^2} \leq \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} < r$$

ja edelleen $-r < x' - x < r$. Edellisestä epäyhtälöstä seuraa $x' > 0$. Sama päättely voidaan tehdä alkiolle y'.

5. (3:6 osa) Olkoon $C[0,1]$ jatkuvien funktioiden $[0,1] \to \mathbb{R}$ avaruus varustettuna max-metriikalla $d(f,g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$. Näytä, että joukko

$$A = \{f \in C[0,1] : f(t) > 0 \text{ kaikilla } t \in [0,1]\}$$

on avoin $C[0,1]$:ssa.

Ratkaisu. Olkoon $f \in A$. Etsitään alkiolle f sellainen kuulaympäristö, että $B(f,r) \subset A$. Koska f on jatkuva, se saa pienimmän arvonsa a jossain välin $[0,1]$ pisteessä x. Osoitetaan, että $B(f,a/2) \subset A$. Olkoon $g \in B(f,a/2)$. On näytettävä, että $g \in A$, ja tätä varten riittää osoittaa, että funktion g arvot ovat positiivisia. Jos $t \in [0,1]$, niin

$$g(t) = g(t) - f(t) + f(t) \geq g(t) - f(t) + a \geq a - |f(t) - g(t)| \geq a - d(f,g) > a/2 > 0.$$

Siis A on avoin.

6. (3:7) Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $f : X \to \mathbf{R}$ sellainen kuvaus että

$$A_r = \{x \in X : f(x) < r\}$$

on avoin joukko kaikilla rationaaliluvuilla $r \in \mathbf{Q}$. Osoita, että A_r on avoin joukko kaikilla $r \in \mathbf{R}$.

Ratkaisu. Olkoon r irrationaaliluku. Osoitetaan, että A_r on avoin. Olkoon

$$B = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}.$$

Nyt A_q avoin jokaisella $q \in B$. Selvästi $\bigcup_{q \in B} A_q \subset A_r$. Olkoon sitten $x \in A_r$. Nyt $f(x) < r$ ja aikaisemmin on opittu, että kahden erisuuruisen reaaliluvun välissä on rationaalilukuja. Olkoon siis $f(x) < q_0 < r$. Näin ollen $x \in A_{q_0}$ ja edelleen $x \in \bigcup_{q \in B} A_q$. Lopuksi huomataan, että kirjan Topologia I lauseen 3.4. nojalla avoimien joukkojen mielivaltainen yhdiste on avoin. Siis A_r on avoin.