

Topologia I

Harjoitus 3

Viikko 5 (4.2.-8.2. 2013)

1. Olkoon  $A_t = [t, 2t] = \{x \in \mathbb{R} : t \leq x \leq 2t\}$  kaikilla  $t > 0$ . Määää  $\bigcup_{t>0} A_t$  ja  $\bigcap_{t>0} A_t$ .

2. Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus,  $a \in X$ ,  $B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$  avoin kuula sekä  $\overline{B}(a, r)$  vastaava suljettu kuula, kun  $r > 0$ . Näytä, että

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B(a, 1 + 1/n) = \overline{B}(a, 1).$$

3. Tutki onko  $A$  avoin joukko tason  $\mathbf{R}^2$  euklidisessa metriikassa, kun

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0\}.$$

4. Näytä, että

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

on tason  $\mathbf{R}^2$  avoin joukko euklidisessa metriikassa.

5. (3:6 osa) Olkoon  $C[0, 1]$  jatkuvien funktioiden  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  avaruus varustettuna max-metriikalla  $d(f, g) = \max_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$ . Näytä, että joukko

$$A = \{f \in C[0, 1] : f(t) > 0 \text{ kaikilla } t \in [0, 1]\}$$

on avoin  $C[0, 1]$ :ssa. *Vihje:* jos  $g \in A$ , niin kurssin Analyysi I nojalla  $g$  saa pienimmän arvonsa välillä  $[0, 1]$ , eli on olemassa sellainen  $t_0 \in [0, 1]$  että  $g(t) \geq g(t_0) > 0$  kaikilla  $t \in [0, 1]$ . Näytä reaalilukujen kolmioepäyhtälön avulla, että  $B(g, r) \subset A$  kun  $r = g(t_0)/2$ .

6. (3:7) Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus ja  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  sellainen kuvaus että

$$A_r = \{x \in X : f(x) < r\}$$

on avoin joukko kaikilla rationaaliluvuilla  $r \in \mathbf{Q}$ . Osoita, että  $A_r$  on avoin joukko kaikilla  $r \in \mathbf{R}$ . *Vihje:* valitse sellainen jono  $(q_n) \subset \mathbf{Q}$ , että  $q_n < r$  kaikilla  $n$  ja  $q_n \rightarrow r$  kun  $n \rightarrow \infty$ , sekä käytä avoimien joukkojen yhdistettä koskevaa tulosta (Väisälä, 3:4).

*Lisäpisteet:* Suoritetuista laskuharjoitustehtävistä saa lisäpisteitä seuraavasti (kurssikokeita varten): joka laskuharjoituskerralla 4-6 tehtävää = +1p ja 2-3 tehtävää = +1/2 p. Lisäpisteiden maksimi on siis 11 p. Lisäpisteet ynnätään kurssikokeista saataviin pisteisiin (max 2 x 24 = 48 p).