Topologia I
Harjoitus 2
Viikko 5 (28.1.-1.2. 2013)

1. Olkoon $|x|_1 = |x_1| + |x_2|$, kun $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Piirrä normia $|\cdot|_1$ vastaavan metriikan suljettu kuula $\overline{B}(\overline{0}, 2)$, missä $\overline{0} = (0, 0)$.

2. (2.4) Tutki ovatko d ja e metriikkoja reaalisuoralla $\mathbf{R}$, kun
(i) $d(s,t) = |s-t|^2$, $(s, t \in \mathbf{R})$,
(ii) $e(s,t) = \sqrt{|s-t|}$, $(s, t \in \mathbf{R})$.
Neuvo. Tapauksessa (ii) verifioi ensin että $\sqrt{s+t} \leq \sqrt{s} + \sqrt{t}$ kun $s, t \geq 0$.

3. (2.11 osa) Olkoon $S(\overline{0}, 1)$ pallo tason $\mathbf{R}^2$ euklidisessa metriikassa. Määritä läpimitta $d(S(\overline{0}, 1))$, kun
(i) d on euklidinen metriikka,
(ii) d on tehtävässä 2:1 esiintyvän normin $|\cdot|_1$ antama metriikka.
Muistutus. Tapauksessa (ii) kannattaa muistaa Schwarzin epäyhtälöä tasossa $\mathbf{R}^2$ (Väisälä, kohta 1.4).

4. (2.12) Olkoon $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} : f \text{ jatkuva välillä } [0,1]\}$ varustettuna max-normilla $|f - g|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$. Olkoon lisäksi $p_n(t) = t^n$, kun $t \in [0,1]$ ja $n \in \mathbf{N}$, sekä $A = \{p_n : n \in \mathbf{N}\}$. Määritä läpimitta $d(A)$ avaruudessa $C[0,1]$.

5. Määritä tason joukkojen $A = \{(x,y) : x^2 + 1 + y \leq 0\}$ ja $B = \{(x,y) : y > 0\}$ välinen etäisyys $d(A,B)$ (i) euklidisessa metriikassa, (ii) diskreetissä $\{0,1\}$-metriikassa.

6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$, $B \subset X$ sellaisia joukkoja, että $A \cap B \neq \emptyset$. Näytä, että yhdisteen $A \cup B$ läpimitalle $d(A \cup B)$ on voimassa

$$d(A \cup B) \leq d(A) + d(B).$$

Laskuharjoitustehtävistä tulee jatkossa myös kopioitava paperiversio huoneeseen C127.